МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ»

КАФЕДРА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ
И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

В.П. ЧЕРНОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ И МЕНЕДЖМЕНТЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ
2010

ББК 22.161
Ч 47

Чернов В.П.

Математические модели и методы в экономике и менеджменте: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2010. – 235 с.

Пособие содержит учебные и методические материалы по анализу безубыточности производства, оптимизации производственных планов, моделированию финансовых и инвестиционных задач, моделям управления запасами и систем обслуживания.

Изложение теоретического материала сопровождается специально разработанными средствами компьютерного моделирования на основе электронных таблиц Excel. В пособии приведены образцы компьютерного моделирования по всем темам. Для ряда моделей предлагаются как формульные расчетные схемы, так и средства имитационного моделирования. Компьютерные схемы и алгоритмы анализа управленческих решений, разрабатываемые на материалах конкретных ситуаций, нацелены на дальнейшие практические применения.

Материалы пособия использовались в преподавании магистрантам и слушателям программ MBA Высшей экономической школы Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов.

Пособие ориентировано на магистрантов высших учебных заведений направлений «Экономика» и «Менеджмент», а также слушателей системы дополнительного образования, переподготовки и повышения квалификации.

Рецензенты:
д-р техн. наук, проф. **Г.В. Савинов**
Засл. работник ВШ РФ, д-р экон. наук, проф. **Н.Н. Погостинская**

ISBN 978-5-7310-2584-3

ВВЕДЕНИЕ

Методы количественного анализа решений по праву относятся к наиболее сложным разделам менеджмента. Применяемый здесь математический аппарат позволяет моделировать и обосновывать прогнозы развития ситуации, формировать систему целей, строить в соответствии с этим текущие и перспективные производственные планы, оптимизировать обеспечение планов необходимыми ресурсами, анализировать устойчивость принимаемых решений в ситуации неопределенности и риска, разрабатывать, принимать и реализовывать наиболее эффективные управленческие решения.

Современные исследования экономических проблем тесно переплелись с математическими расчетами, математическим аппаратом анализа. Они основываются на экономико-математическом моделировании.

Содержательную и обычно весьма трудную экономическую проблему переводят на математический язык, строят ее математическое описание, математическую модель. Что-то несущественное при этом отбрасывают, первоначально размытая проблема обретает более четкие очертания, превращается в математическую задачу. Математическая модель позволяет проанализировать ситуацию особенно глубоко, получить хорошо обоснованные и далеко идущие выводы.

Пособие содержит материалы по моделям и методам анализа безубыточности производства, оптимизации производственных планов методами линейного программирования, моделям и методам решения финансовых и инвестиционных задач, моделям управления запасами, моделям систем обслуживания.

Изложение теоретического материала сопровождается специально разработанными средствами компьютерного моделирования на основе широко распространенных электронных таблиц Excel. Используемые при этом средства открывают широкие возможности моделирования и вариантного анализа решений. В пособии приведены образцы расчетов в Excel, даны указания по их самостоятельной реализации, сформулированы упражнения для аудиторной и самостоятельной индивидуальной работы.

Компьютерные схемы и алгоритмы анализа управленческих решений, разрабатываемые студентами на материалах конкретных ситуаций, подразумевают дальнейшие практические применения к решению реальных управленческих проблем.

Раздел 1. Линейные модели планирования

Материал раздела направлен на то, чтобы студент умел:

- провести компьютерный расчет и графический анализ безубыточного объема производства в Excel;
- средствами Excel подобрать параметры, выводящие на заданные характеристики безубыточности;
- связать построение производственного плана с прогнозом спроса и доступными ресурсами;
- определить критерии и ограничения для моделирования производственного плана;
- построить математическую модель оптимизации производственного плана;
- дать графическое представление оптимального плана для простых ситуаций;
- провести компьютерную оптимизацию плана средствами Excel;
- определить характеристики надежности (устойчивости) оценок плана средствами Excel;
- применять полученные знания к решению вопросов производственного планирования.

Анализ безубыточности

Оценка производственных возможностей и результатов производственного инвестирования начинается с анализа безубыточности.

Анализ безубыточности (*Break-even Point Analysis, BEP Analysis*) позволяет определить тот объем производства (и продаж), который покрывает издержки, связанные с этим производством. Тем самым определяются необходимые производственные мощности.

В простом и наиболее распространенном варианте анализа все зависимости предполагаются линейными.

Для проведения такого анализа совокупные издержки C (Total Cost) классифицируются на две группы:

- постоянные издержки F (Fixed Cost), не зависящие от объема производства,
- переменные издержки V (Variable Cost), прямо пропорциональные объему производства.

$$C = F + V.$$

Коэффициентом пропорциональности являются удельные переменные издержки v (переменные издержки в составе единицы продукции). Они называются также маржинальными издержками (*Marginal Cost*).

Выручка R (*Revenue*) пропорциональна объему продаж. Коэффициентом пропорциональности является цена p (*price*) единицы продукции.

Разность M между выручкой и переменными издержками называется маржинальным доходом (*Contribution Margin*):

$$M = R - V.$$

Таким образом, если Q – объем производства (и продаж) в натуральных единицах, то

F не зависит от Q,

$$V = v \times Q,$$

$$R = p \times Q,$$

$$M = (p - v) \times Q.$$

Прибыль π (*Profit*) определяется равенством

$$\pi = R - C = R - V - F = pQ - vQ - F = (p - v)Q - F.$$

Условие безубыточности (и бесприбыльности) соответствует нулевой прибыли:

$$\pi = (p - v)Q - F = 0.$$

Отсюда точка безубыточности BEP (Break-even Point) в натуральной шкале определяется равенством:

$$\text{BEP(нат.)} = Q = \frac{F}{p - v} \text{ (нат. ед.).}$$

Эта формула определяет точку безубыточности BEP, то есть тот объем производства Q* (в натуральных единицах), который покрывает совокупные затраты.

Точку безубыточности BEP можно выразить и в рублях. Для этого следует умножить обе части последнего равенства на цену p. После простых преобразований получим:

$$\text{BEP(руб.)} = p \times \text{BEP(нат.)} = \frac{pF}{p - v} = \frac{F}{(p - v)Q/pQ} = \frac{F}{(R - V)/R} = \frac{F}{M/R} \text{ (руб.).}$$

Формула показывает, каков должен быть объем производства в рублях, чтобы выручка полностью покрыла все затраты. Отметим, что полученная формула годится и для ситуации одновременного производства многих видов продукции, в то время как предыдущая формула для BEP(нат.) применима лишь для производства однородной продукции.

Точку безубыточности BEP можно выразить и в процентах. Для этого разделим обе части последнего равенства на объем выручки R. Получим:

$$\text{BEP}(\%) = \frac{\text{BEP(руб.)}}{R} = \frac{F}{M}.$$

Формула показывает, каков должен быть объем производства в процентах от выручки, чтобы полностью покрыть все затраты. Критическим значением здесь является 100%. Если

$$\text{BEP}(\%) = 100\%,$$

то производство безубыточно, но и бесприбыльно. Если

$$\text{BEP}(\%) < 100\%,$$

то предприятие производит и продает достаточный объем продукции, покрывает все издержки и получает прибыль. Если же

$$\text{BEP}(\%) > 100\%,$$

то предприятие терпит убытки.

Например, если BEP(%) = 70%, то уже 70% объема производства достаточно для покрытия соответствующих затрат, связанных с этим объемом производства. Если же BEP(%) = 120%, то объем производства должен быть увеличен на 20%, чтобы достичь уровня безубыточности.

Задание 1.1. Два вида оборудования

Для изготовления изделий можно использовать один из двух видов оборудования. Производственные затраты указаны в таблице 1.1.

Требуется дать ответ на следующие вопросы.

1. Определите удельные переменные (маржинальные) затраты для каждого вида оборудования.
2. При каком объеме производства два вида оборудования оказываются равновыгодными?

3. Какой вид оборудования выгоднее и насколько при годовой производственной программе 1500 изделий?
4. При какой цене на более выгодном оборудовании достигается безубыточность продаж?
5. Какая отпускная цена обеспечит при этом расчетную прибыль в 3000 руб.?
6. Для условий предыдущего пункта определите точку безубыточности в трех шкалах: BEP(нат.), BEP(руб.) и BEP(%).
7. Каков должен быть объем постоянных затрат для альтернативного вида оборудования, чтобы обеспечить тот же размер расчетной прибыли 3000 руб.?
8. Для условий предыдущего пункта определите точку безубыточности в трех шкалах: BEP(нат.), BEP(руб.) и BEP(%) для альтернативного оборудования.
9. Изобразите графики зависимости затрат и выручки от объема выпуска для обоих видов оборудования.

Таблица 1.1

Исходные данные по видам оборудования

	Оборуд. 1	**Оборуд. 2**
Исходные материалы (руб. / шт.)	8,8	12,6
Зарплата (руб. / шт.)	5,2	3,4
Затраты на наладку и эксплуатацию (руб. / год)	16000	12000

Пример 1.1. Компьютерный анализ безубыточности

На схеме 1.1 представлены выполненные в Excel таблицы и графики по анализу безубыточности. Схема сверху вниз состоит из трех блоков. Верхний блок разделен на две части: левую и правую.

Левая часть содержит все исходные данные, необходимые для дальнейших расчетов. Эти данные вводятся в 4 ячейки, выделенные фоном. Справа, тоже в 4 ячейках, выделенных фоном, содержатся расчетные формулы, вычисляющие прибыль и точку безубыточности в трех шкалах.

В среднем блоке по тем же 4 ячейкам с исходными данными проведено формульное вычисление затрат, выручки и прибыли в зависимости от объема продаж. По столбцам среднего блока построены графики, придающие наглядность полученным результатам. Они представлены в нижнем блоке.

Изменение хотя бы в одной из 4 ячеек с исходными данными автоматически приводит к соответствующим изменениям в 4 ячейках справа, пересчету таблицы среднего блока и перестроению графиков.

На схеме 1.2 проведены аналогичные расчеты. Однако здесь исходные данные представлены по-другому. Они не содержат информации об объеме производства в натуральных единицах. В ячейках справа тоже нет данных о точке безубыточности в натуральной шкале.

Основой среднего блока на этой схеме является последовательность не объемов, а процента продаж. Процент продаж отмечен и по оси абсцисс на графике.

Такие расчеты пригодны для анализа производства и продаж широкой гаммы продукции, не сводимой непосредственно к одному продукту.

Эта схема тоже автоматически пересчитывается при любом изменении исходных данных.

На рис. 1.3 проведены расчеты по сравнению двух видов оборудования по данным задания 1.1.

В верхней части приведены необходимые расчеты. Они разделены на две части, относящиеся к разным видам оборудования. Расчеты организованы так же, как и для точки безубыточности.

В нижней части построены графики, позволяющие придать необходимую наглядность расчетным результатам.

Указание. Постройте в Excel такие универсальные схемы, предназначенные для анализа безубыточности и сравнения двух видов оборудования.

Задания 1.2. Подбор параметров

Определите в Excel в соответствии с рис. 1.1 с помощью процедуры «Подбор параметра»:

1. Объем продаж Q, при котором прибыль равна 0 и равна 200000 руб.
2. Цену p, при которой прибыль равна 0 и равна 200000 руб.
3. Маржинальные затраты v, при которых прибыль равна 0 и равна 200000 руб.
4. Постоянные затраты F, при которых прибыль равна 0 и равна 200000 руб.

Определите в Excel в соответствии с рис. 1.2 с помощью процедуры «Подбор параметра»:

5. Объем выручки R, при котором прибыль равна 0 и равна 2500 руб.
6. Объем совокупных затрат C, при котором прибыль равна 0 и равна 2500 руб.
7. Отдельно объем выручки R, размер общих затрат C и величину доли постоянных затрат, при которых безубыточный объем продаж равен 1800 руб.

	A	B	C	D	E	F
1	**Исходные данные:**		⇓	**Результаты:**		⇓
2	**Планир. объем продаж (ед.):**		**5000**	**Прибыль**		**400 000р.**
3	**Цена:**		**500р.**	**Безубыт. объем продаж (ед.):**		**3000**
4	**Удельные переменные затраты (на ед. продукции):**		**300р.**	**Безубыт. объем продаж (руб.):**		**1 500 000р.**
5	**Постоянные затраты:**		**600 000р.**	**Безубыт. объем продаж (%):**		**60%**
6						
7	**Таблица соответствия продаж, затрат, выручки и прибыли**					
8	**Объем продаж (ед.)**	**Перемен. затраты**	**Постоян. затраты**	**Общие затраты**	**Выручка**	**Прибыль**
9	0	0р.	600 000р.	600 000р.	0р.	*-600 000р.*
10	500	150 000р.	600 000р.	750 000р.	250 000р.	*-500 000р.*
11	1000	300 000р.	600 000р.	900 000р.	500 000р.	*-400 000р.*
12	1500	450 000р.	600 000р.	1 050 000р.	750 000р.	*-300 000р.*
13	2000	600 000р.	600 000р.	1 200 000р.	1 000 000р.	*-200 000р.*
14	2500	750 000р.	600 000р.	1 350 000р.	1 250 000р.	*-100 000р.*
15	3000	900 000р.	600 000р.	1 500 000р.	1 500 000р.	***0р.***
16	3500	1 050 000р.	600 000р.	1 650 000р.	1 750 000р.	100 000р.
17	4000	1 200 000р.	600 000р.	1 800 000р.	2 000 000р.	200 000р.
18	4500	1 350 000р.	600 000р.	1 950 000р.	2 250 000р.	300 000р.
19	5000	1 500 000р.	600 000р.	2 100 000р.	2 500 000р.	400 000р.

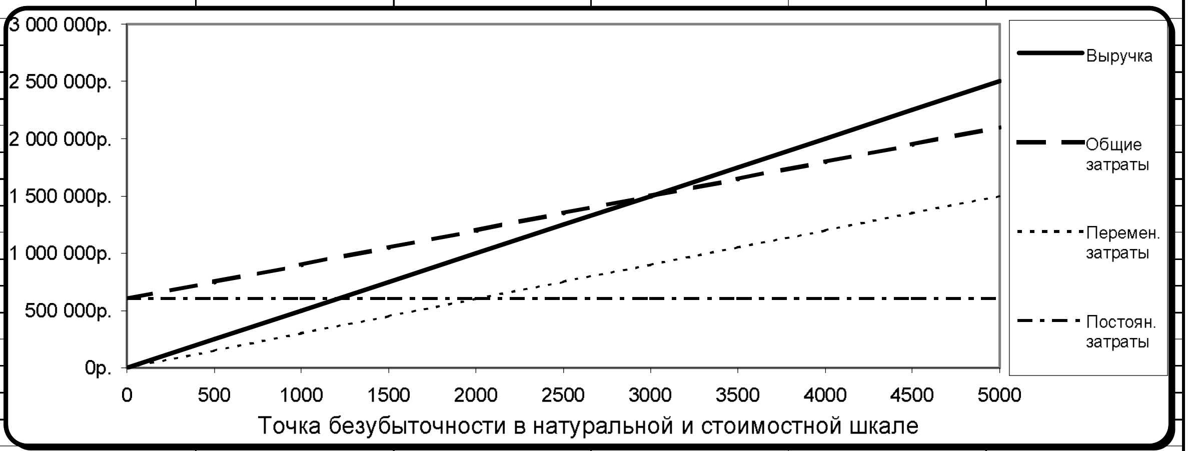


Рис. 1.1. Расчет безубыточности по четырем характеристикам: Объему продаж, Цене, Удельным переменным затратам, Постоянным затратам

	A	B	C	D	E	F
1	**Исходные данные:**		⇓	**Результаты:**		⇓
2	Выручка		**4500**	Прибыль		**2100**
3	Общие затраты		**2400**	Безубыточный объем продаж в руб.		**1831**
4	Доля постоянных затрат		**60%**	Безубыточный объем продаж в %		**41%**
6	**Таблица соответствия выручки, затрат и прибыли**					
7	**Процент продаж**	**Перемен. затраты**	**Постоян. затраты**	**Общие затраты**	**Выручка**	**Прибыль**
8	0%	0	1440	1440	0	*-1440*
9	10%	96	1440	1536	450	*-1086*
10	20%	192	1440	1632	900	*-732*
11	30%	288	1440	1728	1350	*-378*
12	40%	384	1440	1824	1800	*-24*
13	50%	480	1440	1920	2250	330
14	60%	576	1440	2016	2700	684
15	70%	672	1440	2112	3150	1038
16	80%	768	1440	2208	3600	1392
17	90%	864	1440	2304	4050	1746
18	100%	960	1440	2400	4500	2100

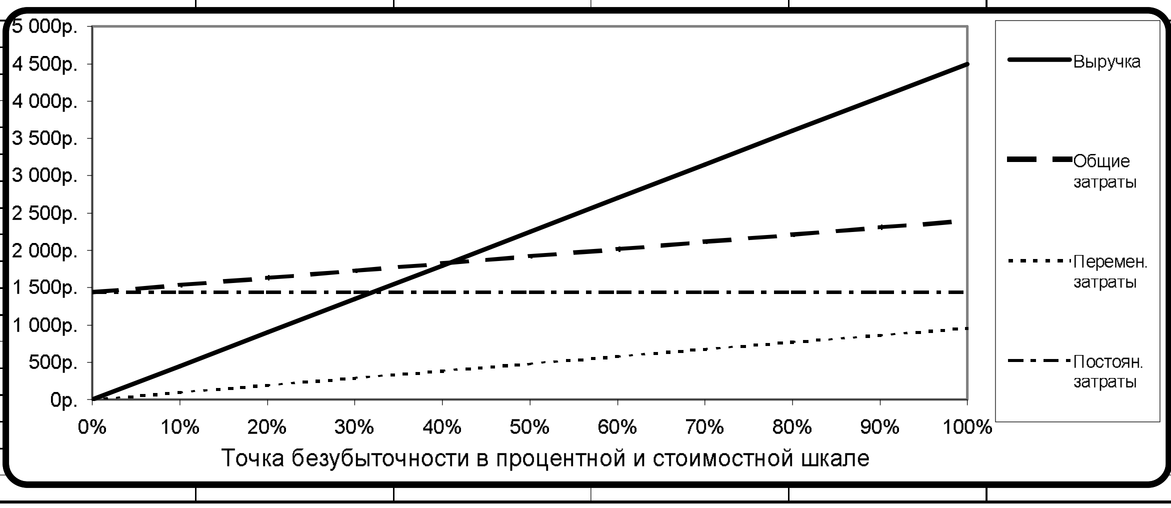


Рис. 1.2. Расчет безубыточности по трем характеристикам: Выручке, Общим затратам и Доле постоянных затрат

Сравнение двух видов оборудования

Оборудование 1

Исходные данные:		Результаты:	
Планир. объем продаж (ед.):	1500	Прибыль при продаже 1500 ед.:	2 000р.
Цена:	26р.	Безубыт. объем продаж (ед.):	1333
переменные затраты (на ед. продукции):	14р.	Безубыт. объем продаж (руб.):	34 667р.
Постоянные затраты:	16 000р.	Безубыт. объем продаж (%):	89%

Оборудование 2

Исходные данные:		Результаты:	
Планир. объем продаж (ед.):	1500	Прибыль при продаже 1500 ед.:	3 000р.
Цена:	26р.	Безубыт. объем продаж (ед.):	1200
переменные затраты (на ед. продукции):	16р.	Безубыт. объем продаж (руб.):	31 200р.
Постоянные затраты:	12 000р.	Безубыт. объем продаж (%):	80%

Таблица соответствия продаж, затрат, выручки и прибыли

Продажи (ед.) 1	Перемен. затраты 1	Постоян. затраты 1	Общие затраты 1	Выручка 1	Прибыль 1
0	0р.	16 000р.	16 000р.	0р.	**-16 000р.**
150	2 100р.	16 000р.	18 100р.	3 900р.	**-14 200р.**
300	4 200р.	16 000р.	20 200р.	7 800р.	**-12 400р.**
450	6 300р.	16 000р.	22 300р.	11 700р.	**-10 600р.**
600	8 400р.	16 000р.	24 400р.	15 600р.	**-8 800р.**
750	10 500р.	16 000р.	26 500р.	19 500р.	**-7 000р.**
900	12 600р.	16 000р.	28 600р.	23 400р.	**-5 200р.**
1050	14 700р.	16 000р.	30 700р.	27 300р.	**-3 400р.**
1200	16 800р.	16 000р.	32 800р.	31 200р.	**-1 600р.**
1350	18 900р.	16 000р.	34 900р.	35 100р.	**200р.**
1500	21 000р.	16 000р.	37 000р.	39 000р.	**2 000р.**

Таблица соответствия продаж, затрат, выручки и прибыли

Продажи (ед.) 2	Перемен. затраты 2	Постоян. затраты 2	Общие затраты 2	Выручка 2	Прибыль 2
0	0р.	12 000р.	12 000р.	0р.	**-12 000р.**
150	2 400р.	12 000р.	14 400р.	3 900р.	**-10 500р.**
300	4 800р.	12 000р.	16 800р.	7 800р.	**-9 000р.**
450	7 200р.	12 000р.	19 200р.	11 700р.	**-7 500р.**
600	9 600р.	12 000р.	21 600р.	15 600р.	**-6 000р.**
750	12 000р.	12 000р.	24 000р.	19 500р.	**-4 500р.**
900	14 400р.	12 000р.	26 400р.	23 400р.	**-3 000р.**
1050	16 800р.	12 000р.	28 800р.	27 300р.	**-1 500р.**
1200	19 200р.	12 000р.	31 200р.	31 200р.	**0р.**
1350	21 600р.	12 000р.	33 600р.	35 100р.	**1 500р.**
1500	24 000р.	12 000р.	36 000р.	39 000р.	**3 000р.**

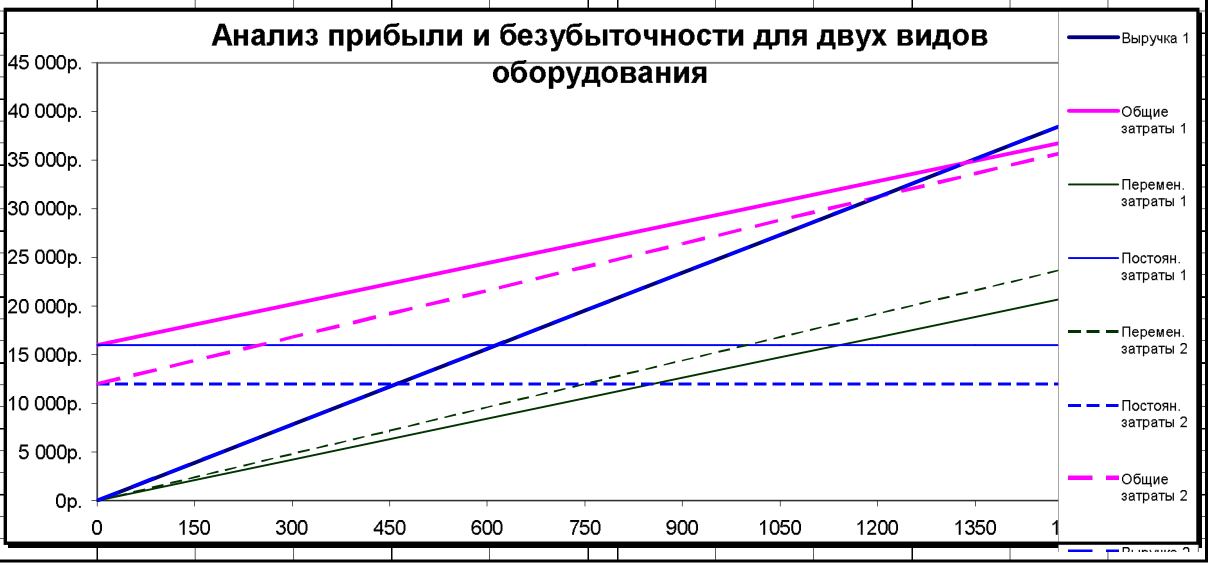


Рис. 1.3. Расчет характеристик равновесной ситуации для двух видов оборудования

Модели планирования

Расчетные методы, которые могут быть эффективно применены при анализе и расчете производственных планов, опираются на специально разработанный математический аппарат. Математическая теория таких расчетов известна под названием линейного программирования.

Линейное программирование описывает условия принятия экономических решений с помощью линейных функций, линейных уравнений и неравенств. Оно позволяет в достаточно простой и математически строгой форме отделить допустимые решения от недопустимых, проанализировать множество допустимых решений и однозначно ответить на вопрос о существовании или несуществовании самого лучшего, оптимального решения. Если такое оптимальное решение существует, то методы линейного программирования позволяют его найти. Соответствующие расчеты и анализ полученных результатов могут быть проведены на компьютере.

В центре нашего внимания будут конкретные расчетные методы, основанные на этой теории. Сама теория будет нас интересовать лишь постольку, поскольку она необходима для понимания работы расчетных методов.

Мы начнем с анализа конкретной ситуации. В этой ситуации, несмотря на ее кажущуюся простоту, присутствует большая часть проблем, возникающих в моделях распределения ресурсов. Затем мы рассмотрим проблематику такого рода задач в общем виде и далее вернемся к развитию первоначальной конкретной ситуации.

Конкретная ситуация ПАРИС

(Планирование и Анализ Рационального Использования Средств)

Петербургская фирма «Сфера» занимается производством кондитерских изделий: различных сортов печенья, бисквитов, кексов и др. Продукция, производимая фирмой, реализуется через сеть розничной торговли и пользуется достаточно устойчивым спросом на региональном рынке.

Спрос на продукцию фирмы подвержен сезонным колебаниям. Наибольшее падение спроса наблюдается летом. Подъемы спроса заметны в праздничные периоды (Новый год, 8 марта, 1 сентября…). Можно заметить недельные колебания спроса с подъемом в конце недели. В то же время спрос можно считать довольно устойчивым.

Необходимые характеристики для анализа условий работы фирмы «Сфера» по производству двух основных продуктов – песочного печенья (*Печенье*) и бисквитных изделий (*Бисквиты*) представлены в табличной форме (табл. 1.2–1.6).

Сырье и исходные материалы поступают из Ленинградской и Вологодской областей, а также из других регионов России и ближнего зарубежья. По основным видам производственного сырья: муке, маслу, яйцу, сахару – заключены контракты с поставщиками, способствующие обеспечению ритмичной поставки этих продуктов на склад фирмы.

Таблица 1.2

Характеристики сырья, стоимости, цены и состава готовых изделий

Виды сырья	Средняя закупочная цена (руб. за кг)	Наличные запасы сырья (кг)	Состав 1 кг *Печенья*	Состав 1 кг *Бисквитов*
Мука	7,60	825	0,5	0,3
Масло	44,00	480	0,3	0,06
Яйцо	16,00	720	0,18	0,6
Сахар	9,20	450	0,2	0,3
Стоимость (руб.)		43050	21,72	17,28
Отпускная цена (руб. за 1 кг)			32,00	27,00

Таблица 1.3

Характеристики использования трудовых ресурсов (человеко-часы)

Оплата 1 ч.-ч. при обычной работе (руб.)	Недельный объем трудовых ресурсов (ч.-ч.)	Оплата 1 ч.-ч. при св.-ур. работе (руб.)	Доступный недельный объем св.-ур. работы (часы)	Затраты труда (ч.-ч.) на 1 кг *Печенья*	Затраты труда (ч.-ч.) на 1 кг *Бисквитов*
25,00	200	50,00	100	0,07	0,09

Таблица 1.4

Характеристики производительности оборудования
(в часах на 1 кг изделий)

Затраты и фонд времени (в часах) / Вид оборудования	Недельный фонд времени работы оборудования	На 1 кг *Печенья*	На 1 кг *Бисквитов*
По подготовке и разделке теста	40	0,015	0,006
По выпечке готовых изделий	40	0,0075	0,015

Таблица 1.5

Характеристики доставки и хранения по каждому виду сырья

Средние затраты на заказ и доставку (руб.)	Стоимость хранения 1 кг сырья (руб. в неделю)
1000	0,35

Таблица 1.6

Оценки спроса на кондитерские изделия

Виды кондитерских изделий	*Печенье*	*Бисквиты*
Предварительные оценки недельного объема продаж (кг)	3000	3000

Что можно извлечь из имеющихся ограниченных производственных возможностей фирмы и как наилучшим образом использовать эти возможности? Как сформировать максимально эффективный производственный план? В чем узкие места такого плана? Позволяют ли производственные мощности расширить при необходимости объемы производства? Что и как следует изменить в исходной ситуации в первую очередь с тем, чтобы повысить эффективность плана?

Сохраняет ли эффективный план устойчивость при изменении производственной ситуации? Можно ли вообще определить хороший устойчивый план в нестабильной производственной ситуации? Или это должна быть система планов? Как построить такую систему, учитывающую изменения ситуации?

Анализ статической ситуации ПАРИС

Мы рассмотрим вопросы построения оптимального производственного плана в сложившихся условиях, то есть в статической ситуации. После освоения методики разработки плана потребуется самостоятельно разработать систему производственного планирования уже в динамической ситуации.

Такая динамика связана не просто с разработкой одного плана, а с формированием целой последовательности производственных планов, согласованных друг с другом. Реализация очередного плана построена на условиях, определяемых реализацией предыдущего плана, и сама задает в свою очередь условия реализации последующего плана. Всю эту согласованную последовательность планов потребуется выстроить оптимальным образом.

Производственный план для фирмы «Сфера» должен быть представлен двумя числами, соответствующими объемам выпуска двух видов продукции: *Печенья* и *Бисквитов.*

Некоторые планы могут оказаться недопустимыми (невозможными), для них не хватит имеющихся в наличии ресурсов. Другие будут допустимыми, для них ресурсов хватит. Ограниченность спроса также должна быть учтена при определении допустимости производственного плана.

Возможных, допустимых планов, конечно, чрезвычайно много. Каждому такому плану соответствует своя величина выручки от продажи готовых изделий. Задача состоит в нахождении наилучшего, оптимального плана, то есть такого допустимого плана, которому соответствует наибольшая выручка.

Построим ***математическую модель*** задачи. Составление модели начинается с введения переменных. Переменные являются элементами языка, на котором будет сформирован производственный план. Такой план в данном случае – это пара величин, соответствующих объемам производства (количеству килограммов) продукции одного и другого вида. Обозначим посредством x_1 объем производства *Печенья*, посредством x_2 – объем производства *Бисквитов*. Следует найти наилучший (оптимальный) производственный план.

Переменные, которые мы ввели, позволяют выразить ограниченность ресурсов в математической форме. Данные в таблицах 1.2–1.4 показывают расход ресурсов на изготовление продукции и доступные объемы ресурсов. Каждая строка является основной для формирования неравенства по своему виду ресурса.

$$0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \le 825.$$

Это неравенство показывает, что суммарные расходы муки на *Печенье* в количестве x_1 кг и на *Бисквиты* в количестве x_2 кг (левая часть неравенства) не должны превосходить доступные запасы *Муки* (правая часть неравенства). Аналогичные неравенства можно написать для *Масла*, *Яйца* и *Сахара*:

$$0{,}3x_1 + 0{,}06x_2 \le 480,$$

$$0{,}18x_1 + 0{,}6x_2 \le 720,$$

$$0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \le 450.$$

Трудовые ресурсы содержательно отличаются от сырья, но в математической модели они выступают на тех же основаниях. Ограниченность этих ресурсов (пока без учета возможных сверхурочных работ) выражается неравенством:

$$0{,}07x_1 + 0{,}09x_2 \le 200.$$

Ограниченность производственных мощностей может быть выражена в форме неравенств:

$$0{,}015x_1 + 0{,}006x_2 \le 40,$$

$$0{,}0075x_1 + 0{,}015x_2 \le 40.$$

Ограниченность спроса характеризуется неравенствами

$$x_1 \le 3000, \quad x_2 \le 3000.$$

Кроме того, объем произведенной продукции не может быть отрицательной величиной, то есть

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Таким образом, в целом мы получаем систему неравенств, характеризующих в математической форме условия составления плана производства продукции.

Такая система неравенств образует ***систему ограничений*** задачи. Любая пара значений переменных, то есть вектор (x_1, x_2), называется ***планом*** задачи. Те пары значений, которые удовлетворяют всем неравенствам системы, то есть те планы, которые удовлетворяют системе ограничений, называются ***допустимыми*** планами.

Например, план (500; 1000), согласно которому нужно изготовить 500 кг *Печенья* и 1000 кг *Бисквитов*, – это допустимый план. Чтобы проверить его допустимость, достаточно подставить значения $x_1 = 500$ и $x_2 = 1000$ в систему ограничений и убедиться, что каждое из неравенств выполнено. Разумеется, допустимым будет и всякий план с меньшими неотрицательными объемами производства, так что допустимых планов в нашей модели бесконечно много.

С другой стороны, рассмотрим план (1000; 1000), в котором объем производства *Печенья* удвоен, а объем производства *Бисквитов* оставлен прежним. Этот план – недопустимый. Он не удовлетворяет третьему и четвертому неравенствам системы. Для его выполнения требуется 780 кг яйца и 500 кг сахара, что превышает допустимые значения. И хотя этот план удовлетворяет другим неравенствам, остальных ресурсов хватает, все же выполнить этот план в тех условиях, которые указаны в задаче, не удастся. Конечно, недопустимым будет и всякий план с большими объемами производства продукции. Недопустимых планов бесконечно много.

Сосредоточим внимание на допустимых планах. Каждому из них соответствует свой размер выручки. Например, для плана (500; 1000) выручка составит:

$$z = 32 \times 500 + 27 \times 1000 = 43000 \text{ (руб.)}.$$

В общем случае формулу для определения выручки z можно представить в следующем виде:

$$z = 32x_1 + 27x_2.$$

Мы хотим определить тот из допустимых планов, для которого выручка является максимальной. Выражение для выручки представляет собой математическую запись нашей цели при решении задачи. Такое выражение называется ***целевой функцией*** задачи. Мы хотим найти наибольшее значение целевой функции на множестве допустимых планов задачи.

Математическая запись цели и условий (ограничений), то есть ***математическая модель*** задачи, представляет собой соединение целевой функции (с указанием отыскиваемого вида экстремума) с системой ограничений и выглядит теперь следующим образом.

$$\max\ (32x_1 + 27x_2)$$

при условиях:

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \le 825 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}06x_2 \le 480 \\ 0{,}18x_1 + 0{,}6x_2 \le 720 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \le 450 \\ 0{,}07x_1 + 0{,}09x_2 \le 200 \\ 0{,}015x_1 + 0{,}006x_2 \le 40 \\ 0{,}0075x_1 + 0{,}015x_2 \le 40 \\ 0 \le x_1 \le 3000 \\ 0 \le x_2 \le 3000 \end{cases}$$

Построение математической модели приносит двоякую пользу. Во-первых, оно позволяет сформулировать задачу в ясной, отчетливой форме. Такая форма дает возможность быстро распознать допустимые и недопустимые планы, рассчитать соответствующую выручку.

Во-вторых, построение модели позволяет превратить содержательную экономическую задачу (в нашем примере – задачу о составлении производственного плана) в чисто математическую задачу о поиске максимального значения функции при условии, что переменные подчинены определенной системе ограничений. Это позволяет использовать при ее решении универсальные математические методы, привлечь для решения вычислительную технику и программные средства.

Мы рассматриваем сейчас весьма простую ситуацию. Выпускаются только два вида продукта из небольшого числа ресурсов. Ситуация пока статична, не анализируются механизмы возобновления запасов ресурсов. Тем не менее, такого рода пример может служить основой дальнейшего анализа.

Перейдем к рассмотрению ***задачи оптимального распределения ресурсов*** (такие задачи называют также ***задачами производственного планирования***) в общем случае.

Общий вид задачи производственного планирования

В общем случае задача производственного планирования формулируется следующим образом. Предприятие распоряжается ресурсами различных типов. Среди таких ресурсов могут быть материально-вещественные (в нашем примере – сырье), энергетические, трудовые, технические, финансовые и другие, не участвовавшие в нашем примере. Ресурсы каждого типа могут быть разделены на классы. Сырье – по видам сырья, трудовые – по профессиям и квалификации работников, технические – по техническим характеристикам, финансовые – по источникам финансирования и т.п. Пусть в результате такой классификации, такого разделения получилось m видов ресурсов.

Пронумеруем все виды ресурсов числами от 1 до m, буквой i будем обозначать номер вида ресурса. Таким образом, i удовлетворяет неравенству $1 \le i \le m$. Заметим, что ресурсы разных видов могут измеряться в различных единицах (тоннах, кубометрах, человеко-часах, рублях, штуках и др.).

В течение планового периода предприятие обладает некоторыми доступными объемами ресурса каждого вида. Объем ресурса i-го вида, измеренный в единицах, соответствующих данному виду ресурса, обозначим посредством b_i. Индекс i около буквы b указывает, что доступные объемы ресурсов разных видов могут быть различными.

Из этих ресурсов предприятие способно изготавливать различную продукцию (в нашей ситуации – *Печенье* и *Бисквиты*). Обозначим буквой n общее число видов продукции, которые может выпустить предприятие из имеющихся ресурсов. Занумеруем все виды продукции числами от 1 до n. Буквой j будем обозначать номер вида продукции, так что выполняется неравенство $1 \le j \le n$. Продукция, как и ресурсы, может измеряться в различных единицах.

Пусть c_j – цена, по которой предприятие реализует каждую единицу продукции j-го вида. Индекс j около буквы *c* указывает, что цена разных видов продукции может быть различной.

Производство продукции требует затрат ресурсов. Объем затрат зависит от вида ресурса, вида продукции и количества единиц продукции. Обозначим посредством a_{ij} норму затрат ресурса i-го вида на производство продукции j-го вида. Другими словами, a_{ij} – это количество ресурса i-го вида, затрачиваемое при производстве единицы продукции j-го вида.

Задача оптимального использования ресурсов, задача производственного планирования, состоит в том, чтобы определить, какую продукцию и в каком объеме следует изготовить предприятию из имеющихся ресурсов с тем, чтобы доход от реализации продукции был наибольшим.

Построим математическую модель задачи. Сначала введем переменные. Посредством x_j обозначим искомый объем выпуска продукции j-го вида. Математическую модель можно теперь записать в следующей форме:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n).$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots x_n \ge 0. \end{cases}$$

Верхняя строка записи говорит о максимизации целевой функции. Сама целевая функция представляет собой сумму произведений цен на объем выпуска для различных видов продукции, то есть доход предприятия от продажи изготовленной продукции.

Фигурная скобка объединяет систему ограничений задачи, неравенства, входящие в систему, соответствуют различным видам ресурсов. Каждое такое неравенство говорит о том, что суммарное количество ресурса, используемое в производстве различных видов продукции, не превосходит общего запаса этого ресурса.

Рассмотрим, например, первое неравенство. В правой его части указана величина b_1, общий объем запаса ресурса первого вида. В левой его части находятся величины a_{ij} с одним и тем же первым индексом i=1 и различными вторыми индексами. Каждая такая величина a_{1j} указывает количество ресурса одного и того же первого вида, затрачиваемого на производство одной единицы продукции j-го вида. Величина a_{ij} умножается на объем x_j произведенной продукции j-го вида. Такое произведение показывает затраты ресурса первого вида на производство всего количества произведенной продукции j-го вида. Затем все эти затраты ресурса суммируются по всем видам продукции. Таким образом, в левой части первого неравенства – суммарные затраты первого вида ресурса на производство всех видов продукции в соответствующих объемах. В правой части неравенства – общее количество первого вида ресурса, имеющееся в наличии. Само неравенство требует, чтобы расходуемый объем первого ресурса был не больше объема запаса этого ресурса. Аналогичный смысл имеют другие неравенства системы ограничений. Каждое из них относится к своему виду ресурса.

В последней строке системы ограничений указано, что количества производимой продукции не могут быть отрицательными. Заметим, что равенство нулю здесь не запрещено, то есть некоторые (или даже все) виды продукции предприятие может и не выпускать, хотя они и доступны для выпуска.

Экономическая задача поиска плана производства продукции, дающего наибольший доход, превращается в математическую задачу поиска максимального значения целевой функции от n переменных при условии, что значения этих переменных подчинены системе ограничений, имеющих форму неравенств.

Всякий набор значений переменных $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называется ***планом*** задачи. Те планы, которые удовлетворяют системе ограничений, называются ***допустимыми планами***. ***Оптимальным планом*** называется тот из допустимых планов, который дает наибольшее значение целевой функции среди всех ее значений на допустимых планах. Само это наибольшее значение целевой функции, то есть значение целевой функции на оптимальном плане, называется ***оптимумом*** задачи.

Решить задачу производственного планирования – значит найти оптимальный план и оптимум для ее математической модели.

Варианты задачи производственного планирования

Мы рассмотрели общий, но простой вид задачи производственного планирования. Возможны и другие виды, учитывающие специфические особенности моделируемой ситуации. И в этих случаях математическая модель строится аналогичным путем.

Например, спрос на те или иные виды продукции может быть ограничен. Предприятие по своим производственным возможностям, по ресурсам может выпустить больше продукции, чем сможет потом реализовать. Модель оптимального распределения ресурсов в этих новых условиях получается из предыдущей модели с помощью простой модификации. А именно: пусть объем реализации j-го вида продукции ограничен величиной d_j. Тогда к системе ограничений следует дописать неравенства, ограничивающие объемы производства сверху:

$$x_j \le d_j.$$

Новая модель, включающая эти новые неравенства, будет учитывать ограниченность объемов реализации продукции.

Например, недельный спрос на каждый вид продукции фирмы «Сфера» (*Печенье* и *Бисквиты*) ограничен величиной 3000 кг. К уже построенной математической модели следует добавить два неравенства:

$$x_1 \le 3000, \;\; x_2 \le 3000,$$

как это и было сделано выше.

Рассмотрим ограничения противоположного смысла. Предположим, что по всем или по некоторым видам продукции предприятие имеет договоры на поставку с потребителями этой продукции. В соответствии с этими договорами предприятие должно выпустить продукцию в объеме, не меньшем заданного. Пусть продукцию j-го вида предприятие должно изготовить в объеме, не меньшем заданной величины d_j'. Тогда к системе ограничений следует дописать неравенства, ограничивающие объемы производства снизу:

$$x_j \ge d_j'.$$

Разумеется, спрос может быть ограничен одновременно и сверху, и снизу. В этом случае к модели следует добавить все соответствующие ограничения.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда вся выпускаемая продукция или ее часть реализуется комплектами. Предположим, что в комплект входит k_j единиц продукции j-го вида (если какая-то продукция в комплект не входит, то соответствующее k_j равно 0). Пусть цена комплекта равна h. Построим модель для определения оптимального производственного плана в этих условиях.

Обозначим посредством q планируемое (пока еще неизвестное) число комплектов. Новая модель получается из исходной общей модели с помощью простой модификации. В целевую функцию следует ввести доход от продажи комплектов в сумме с доходом от некомплектных продаж произведенной продукции. К прежней системе ограничений следует добавить условия, обеспечивающие то, что комплекты составляются из произведенной продукции. В результате получим:

$$\max \quad hq + (c_1(x_1 - k_1 q) + c_2(x_2 - k_2 q) + \ldots + c_n(x_n - k_n q))$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 - k_1 q \ge 0, \;\; x_2 - k_2 q \ge 0, \;\; \ldots \;\; x_n - k_n q \ge 0 \\ x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; \ldots \; x_n \ge 0 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь еще одну важную модификацию. Предположим, что предприятие может пополнять объемы ресурсов, неся связанные с этим затраты, но и расширяя свои производственные возможности. Пусть i-й ресурс можно приобрести по цене p_i за единицу. Следует определить оптимальные объемы производства в условиях, когда помимо уже имеющихся объемов ресурсов b_i предприятие может использовать дополнительные, пока еще неизвестные объемы этих ресурсов.

Таким образом, следует рассчитать не только объемы производимой продукции, но и объемы приобретаемых ресурсов, которые будут вовлечены в производственный процесс. Обозначим эту неизвестную пока величину дополнительного объема i-го ресурса посредством u_i.

Для того чтобы учесть затраты на приобретение ресурсов, следует величину этих затрат, то есть произведение цены на объем приобретаемого ресурса, ввести в целевую функцию со знаком «минус» для каждого из приобретаемых ресурсов. Для того чтобы учесть возможности использования такой продукции в производственном процессе, следует дополнить соответствующее ограничение, дополнив правые части ограничений новыми объемами ресурсов.

Модель в результате этих изменений примет следующий вид:

$$\max \quad (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) - (p_1u_1 + p_2u_2 + \ldots + p_mu_m)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 + u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 + u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m + u_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots\ x_n \ge 0 \\ u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ \ldots\ u_m \ge 0 \end{cases}$$

Если предприятие производит некоторую продукцию исключительно для собственных нужд (полуфабрикат), то такую продукцию можно рассматривать как покупаемую предприятием у себя самого по нулевой цене, с соответствующими естественными изменениями в модели.

Рассмотренные модели предназначаются для определения оптимального плана в одном промежутке времени. При составлении оптимальной последовательности планов, каждый из которых предназначен для реализации в своем периоде времени, поступают следующим образом. Для каждого промежутка формируют свою модель, а затем эти модели с помощью дополнительных ограничений связывают друг с другом.

Результаты деятельности предприятия (доходы, материальные запасы) в одних периодах времени влияют на условия деятельности в других, последующих периодах. Дополнительные ограничения, сцепляющие друг с другом модели разных периодов, как раз и выражают такие связи между результатами, полученными в одних периодах, и условиями деятельности – в других.

Мы рассмотрели основную, базовую модель оптимального использования ресурсов и различные ее модификации. Эти модификации могут объединяться и использоваться совместно. Разумеется, существуют и другие, не рассмотренные здесь условия и ситуации построения производственного плана. Они также могут быть промоделированы аналогичным образом.

Разнообразные другие дополнительные производственные условия без труда могут быть учтены в математической модели. Они приводят лишь к расширению модели, увеличению числа ограничений и переменных, но не приводят к ее качественному принципиальному изменению.

Общая задача линейного программирования

Выше мы рассмотрели математическую модель задачи оптимального использования ресурсов и несколько модификаций этой модели. Все рассмотренные модели обладают свойствами, позволяющими включить их в широкий и важный класс – класс задач линейного программирования. Задачи линейного программирования охватывают самые разнообразные управленческие ситуации, требующие расчета оптимальных решений. Наряду с различными моделями производственных ситуаций они содержат задачи, возникающие из других экономических проблем. Единый подход к моделированию разнообразных задач позволяет разработать единые методы их решения и анализа, дает возможность увидеть существенные общие черты в проблемах, различных по экономическому содержанию и источникам возникновения. Дадим необходимые определения.

Функция n переменных x_1, x_2, ... x_n

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

называется ***линейной функцией***, если она представима в виде линейной комбинации переменных, то есть в виде суммы переменных с постоянными коэффициентами

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots d_n x_n .$$

Иногда линейной называют также функцию вида

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n) = d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots d_nx_n + d,$$

отличающуюся от предыдущей постоянным слагаемым d.

Равенство

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n) = b,$$

а также неравенства

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n) \le b, \quad f(x_1,x_2,\ldots x_n) \ge b$$

называются ***линейным равенством*** и ***линейными неравенствами***, если функция

$$y = f(x_1,x_2,\ldots x_n)$$

является линейной.

Задачей линейного программирования называется задача, состоящая в нахождении экстремального (максимального или минимального) значения линейной функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_jx_j,$$

при условии, что переменные удовлетворяют системе линейных равенств и неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i (i = \overline{1,k})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i (i = \overline{k+1,l})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i (i = \overline{l+1,m}) \; .$$

Функция, экстремальное значение которой требуется отыскать, называется ***целевой функцией***. Система равенств и неравенств называется ***системой ограничений***.

Всякий набор значений переменных, то есть вектор X значений,

$$X = (x_1,x_2,\ldots x_n)$$

называется ***планом*** задачи. План называется ***допустимым*** планом, если он удовлетворяет системе ограничений. Обычно (но не всегда) множество допустимых планов бесконечно. На разных планах целевая функция принимает различные значения. Задача линейного программирования требует, чтобы среди всех допустимых планов был найден тот план, на котором целевая функция достигает искомого экстремального значения (максимального и минимального, в зависимости от конкретной задачи). Такой план называется ***оптимальным планом***. Значение целевой функции на оптимальном плане называется ***оптимумом***.

Решить задачу линейного программирования – значит найти ее оптимальный план и оптимум.

Матричная форма записи задачи линейного программирования

Задачу производственного планирования, и вообще любую задачу линейного программирования, можно записать в матричном виде. Для этого достаточно ввести еще одни матричные обозначения.

Как обычно, посредством А обозначим матрицу системы ограничений:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Посредством X и B обозначим соответственно столбец неизвестных задачи (план задачи) и столбец свободных членов (правых частей системы ограничений):

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Наконец, посредством C обозначим вектор-строку коэффициентов целевой функции:

$$C = [c_1, c_2, \ldots c_n].$$

Тогда задача производственного планирования запишется в следующей форме

$$\max CX$$
$$\begin{cases} AX \le B \\ X \ge 0 \end{cases}.$$

В этой записи знак 0 обозначает n-мерный нулевой вектор-столбец.

Таким образом, громоздкая развернутая запись обретает компактный матричный вид, удобный для дальнейшего анализа. Общий метод решения задач линейного программирования основан на преобразованиях матриц.

Задачи линейного программирования позволяют моделировать не только производственные ситуации. Проблемы самых различных областей экономики и управления моделируются, исследуются и решаются методами линейного программирования.

Пример графического решения задачи линейного программирования

Приведем графическое решение задачи об изготовлении *Печенья* и *Бисквитов*. Напомним математическую модель этой задачи.

$$\max\ (32x_1 + 27x_2)$$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \le 825 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}06x_2 \le 480 \\ 0{,}18x_1 + 0{,}6x_2 \le 720 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \le 450 \\ 0{,}07x_1 + 0{,}09x_2 \le 200 \\ 0{,}015x_1 + 0{,}006x_2 \le 40 \\ 0{,}0075x_1 + 0{,}015x_2 \le 40 \\ 0 \le x_1 \le 3000 \\ 0 \le x_2 \le 3000 \end{cases}.$$

Построение области допустимых планов

Сначала изобразим границу полуплоскости, соответствующую множеству решений первого неравенства. Для этого неравенство заменим равенством:

$$0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 = 825.$$

Множество решений этого уравнения соответствует прямой на координатной плоскости. Чтобы изобразить прямую, достаточно найти две ее точки. Найдем точки на осях координат. Для этого положим в уравнении $x_2 = 0$. Получим $x_1 = 1650$. Изобразим соответствующую точку на оси $0x_1$ (точка A_1 на рис. 1.4). Теперь положим в уравнении $x_1 = 0$. Получим $x_2 = 2750$. Изобразим соответствующую точку A_2 на оси $0x_2$.

Соединим точки A_1 и A_2 прямой линией. Мы получили граничную прямую искомой полуплоскости.

Эта прямая делит координатную плоскость на две полуплоскости. Для определения полуплоскости, соответствующей множеству решений неравенства, выберем точку, не лежащую на граничной прямой (например, начало координат), и подставим ее координаты в наше неравенство. Получим $0 \le 825$. Неравенство верное. Следовательно, искомой полуплоскостью является та, которая содержит начало координат и, тем самым, лежит слева от граничной прямой.

Если бы мы вместо начала координат взяли, например, точку с координатами (2000; 0), лежащую правее и выше нашей прямой, и подставили бы ее координаты в левую часть неравенства, то получили бы $1000 \le 825$. Неравенство неверно, следовательно, выбранная точка не принадлежит искомой полуплоскости. Искомой оказывается все та же левая полуплоскость.

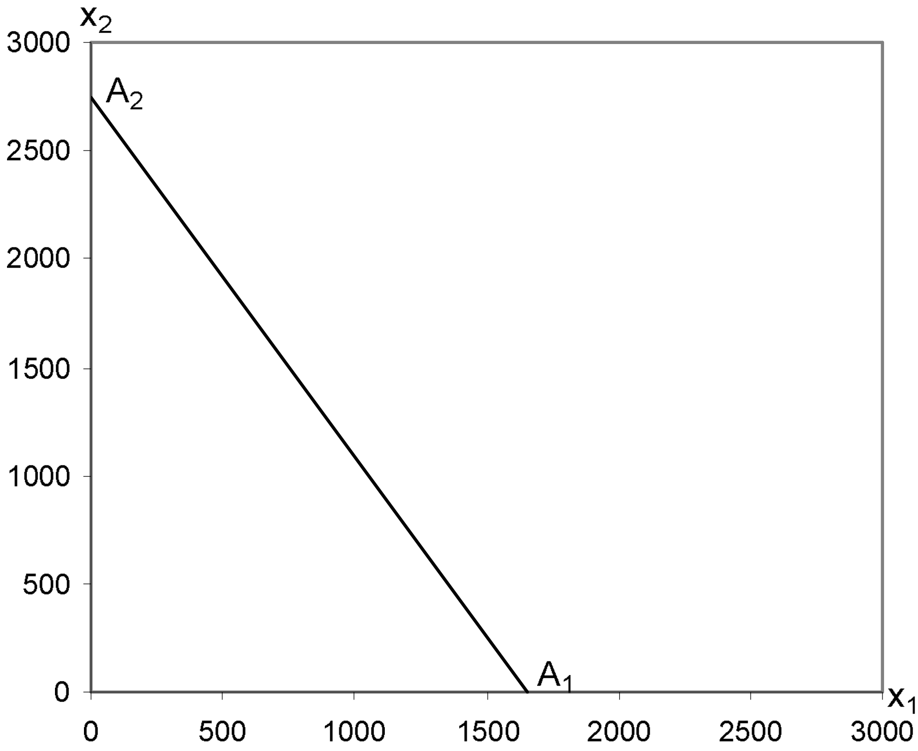


Рис. 1.4. Граничная прямая по ресурсу *Мука*

Теперь найдем полуплоскость, соответствующую второму неравенству системы ограничений. Ее граничная прямая проходит через точку B_1 с координатами (1600; 0), лежащую на оси $0x_1$, и через точку с координатами (0; 8000) на оси $0x_2$. Для удобства изображения заменим вторую точку другой точкой, лежащей на той же прямой.

Для этого положим $x_2 = 3000$. Тогда из уравнения прямой получаем $x_1 = (480 – 0,06*3000) / 0,3 = 1000$. В качестве B_2 возьмем точку с координатами (1000, 3000). Соединим прямой линией точки B_1 и B_2 (рис. 1.5).

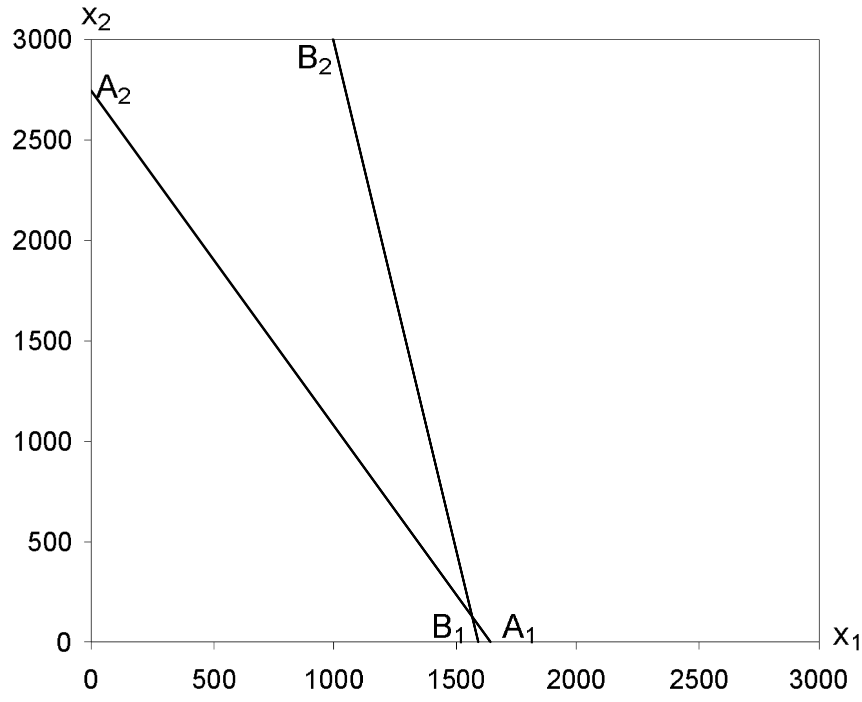


Рис. 1.5. Граничные прямые по ресурсам *Мука* и *Масло*

Из двух возможных полуплоскостей опять следует выбрать ту, которая содержит начало координат.

Аналогично строятся границы по остальным ресурсам (рис. 1.6). Границе по *Яйцу* соответствует прямая C_1C_2, границе по *Сахару* – прямая D_1D_2, границе по *Труду* – прямая E_1E_2, по *Оборудованию 1* – прямая F_1F_2, по *Оборудованию 2* – прямая G_1G_2. Каждый раз следует выбрать ту полуплоскость, которая содержит начало координат.

Условия ограниченности недельного спроса (x_1, x_2 ограничены величиной 3000) определяют горизонтальную и вертикальную границы чертежа. Неотрицательность переменных x_1 и x_2 соответствует первой координатной четверти. Таким образом, четыре стороны квадрата соответствуют ограничениям модели.

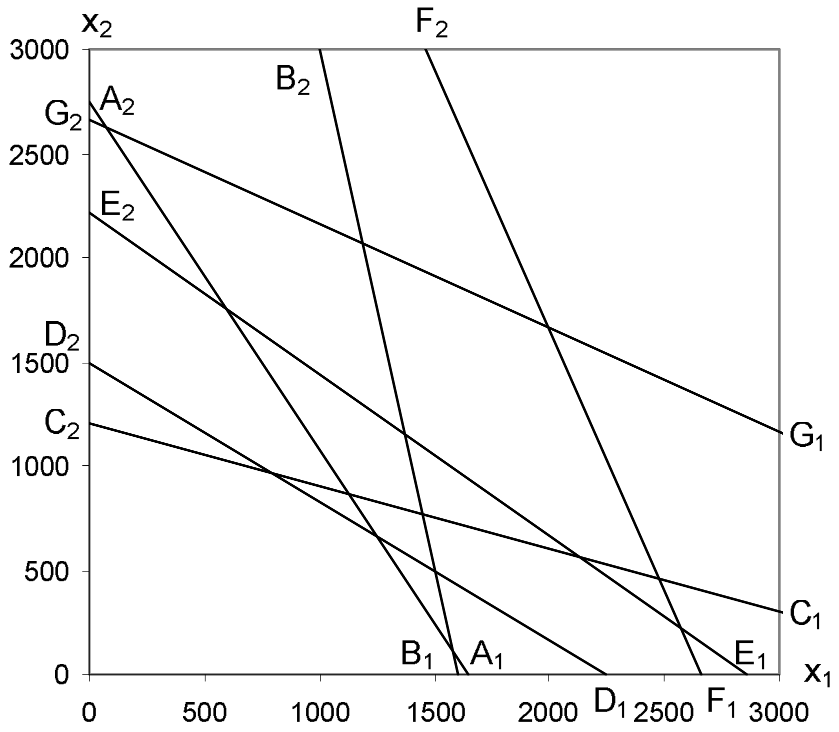


Рис. 1.6. Граничные прямые по всем ресурсам

Пересечение всех полученных полуплоскостей определяет шестиугольник, примыкающий к началу координат. Это и есть область допустимых планов.

Любая точка данного шестиугольника удовлетворяет всем ограничениям задачи и соответствует допустимому плану. Если при этом точка лежит на стороне шестиугольника, то ее координаты, подставленные в левую часть ограничения-неравенства, обращают ограничение в равенство. Такое ограничение называется ***связанным***. Данная ситуация означает, что реализация плана требует полного использования соответствующего ресурса.

Точка, лежащая в вершине шестиугольника, обращает в равенство сразу два ограничения и соответствует полному использованию сразу двух ресурсов. Точек, лежащих на пересечении сразу трех или большего числа ограничений, в нашей задаче не существует.

Точка, лежащая вне шестиугольника, не удовлетворяет хотя бы одному ограничению. Графики позволяют не просто констатировать недопустимость такой внешней точки, но и определить, каким именно ограничениям она не удовлетворяет, каких именно ресурсов не хватает для реализации плана. Вся внешняя область разбивается на многоугольники, точки которых не удовлетворяют тем или иным ограничениям.

Точки, удовлетворяющие всем ограничениям, – это точки нашего шестиугольника. Его границы соответствуют сырьевым ресурсам.

Линии *Труда* и *Оборудования 1* и *2* (прямые E_1E_2, F_1F_2, G_1G_2) оказываются в стороне. Это означает, что при реализации любого допустимого плана данной задачи трудовые ресурсы и производственные мощности не будут, по существу, ограничивать наши возможности, так как они в более жесткой форме ограничены запасами сырья. Следовательно, если у нас появится возможность изменить доступные объемы ресурсов, то ее следует направить в первую очередь на изменение запасов сырья.

Построение области допустимых планов использует лишь систему ограничений. Для определения оптимального плана необходимо привлечь целевую функцию. Однако кое-что про оптимальный план можно сказать уже сейчас.

Во-первых, область допустимых планов непуста и ограничена. Следовательно, оптимальный план существует.

Во-вторых, оптимальным планом наверняка окажется одна из вершин шестиугольника. Если оптимальный план у нашей задачи единствен, то этим планом будет одна вершина. Если же он не единствен, то этим оптимальным планом окажутся две соседние вершины, а вместе с ними и все точки стороны шестиугольника.

Построение градиента и определение оптимального плана

Обратимся к целевой функции. Ее градиент есть вектор (32; 27). Для решения задачи следует изобразить этот вектор в виде стрелки с началом в точке (0; 0) и концом в точке (32; 27).

Такая стрелка является короткой и поэтому плохо различимой на чертеже. Однако длина этой стрелки не играет никакой роли при решении задачи. Важно лишь ее направление. Если обе координаты точки (32; 27) умножить или разделить на одно и то же положительное число, то изменится лишь длина стрелки, но не ее направление. Поэтому на результате решения задачи это не скажется.

Удлиним стрелку до границы нашего рисунка (рис. 1.7). Все линии уровня целевой функции параллельны друг другу и перпендикулярны градиенту. На рис. 1.7 пунктиром изображены линии, соответствующие различным значениям целевой функции, начиная от 10000 и с шагом

16000. Разумеется, такие линии могут быть построены для любых значений целевой функции, они параллельны и все вместе покрывают координатную плоскость.

Градиент показывает направление роста целевой функции. Мы решаем задачу на максимум. Чем больше значение целевой функции, тем лучше. Однако при слишком больших значениях пунктирная линия уровня окажется за пределами области допустимых планов.

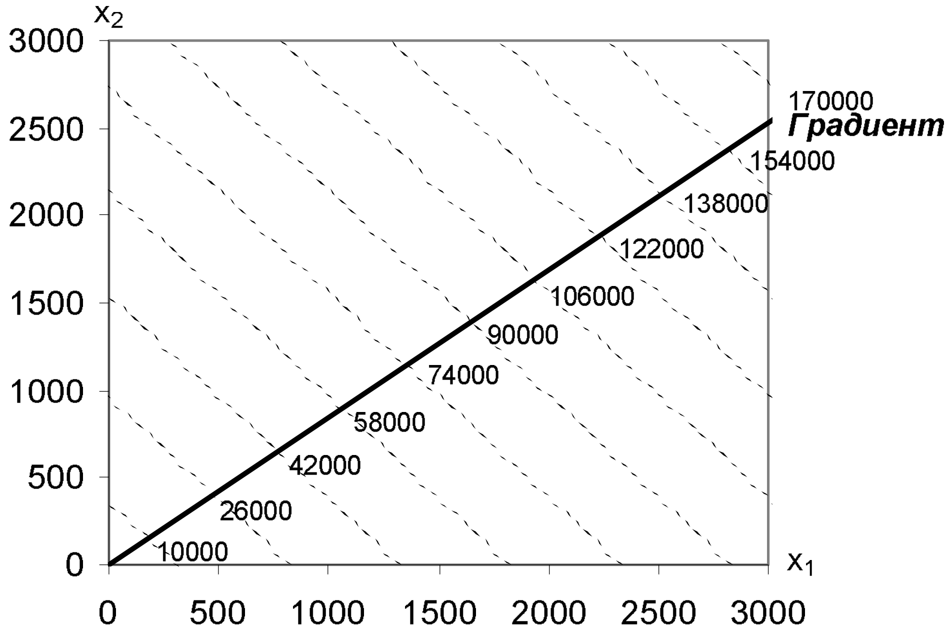
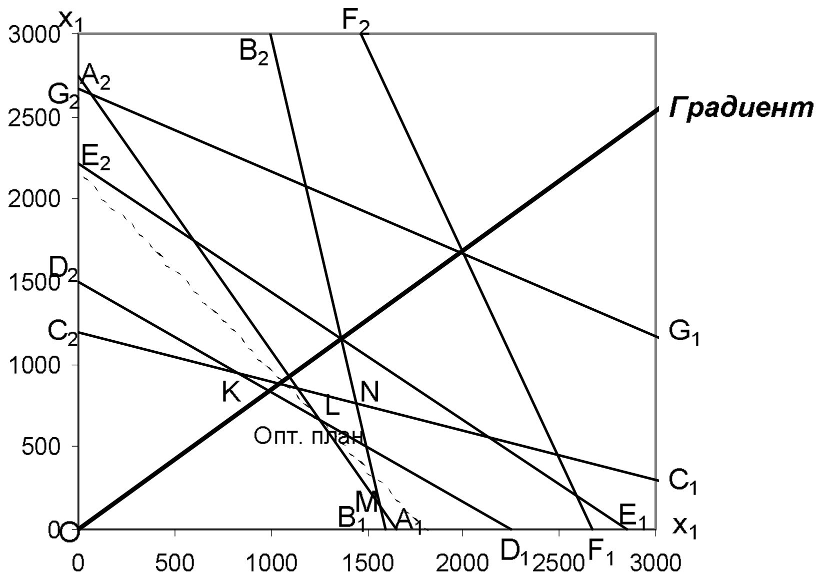


Рис. 1.7. Градиент и линии уровня целевой функции

Необходимо найти крайнее положение линии уровня – такое, когда она имеет хотя бы одну общую точку с областью допустимых планов – шестиугольником OC_2KLMB_1 (рис. 1.8), но при любом сдвиге в направлении градиента выходит за пределы данной области.

В своем крайнем положении линия уровня проходит через точку L. Таким образом, точка L является оптимальным планом задачи. Это единственная точка, принадлежащая одновременно области допустимых планов и линии уровня в ее крайнем положении. Следовательно, наша задача обладает единственным оптимальным планом.

Найдем координаты оптимального плана. Приближенно их можно определить по чертежу. Для точного расчета необходимо решить соответствующую систему уравнений. Точка L лежит на границе первого и



четвертого ограничений.

Рис. 1.8. Построение оптимального плана

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 = 825 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 = 450 \end{cases}.$$

Решив эту систему, получаем компоненты оптимального плана: $x_1 = 1250$ и $x_2 = 667$. Таким образом, оптимальный план X^*_{max} равен:

$$X^*_{max} = (x_1^*, x_2^*) = (1250;\ 667).$$

Он предписывает выпустить 1250 кг *Печенья* и 667 (точнее, 666,667) кг *Бисквитов*.

Для определения оптимума следует подставить компоненты оптимального плана в целевую функцию задачи. Оптимум Z^*_{max} определяется равенством:

$$Z^*_{max} = 32 \times 1250 + 27 \times 666{,}667 = 58000.$$

Таким образом, реализация выпущенной продукции даст выручку в размере 58000 руб. Задача решена. Теперь следует обратиться к экономическому содержанию задачи и проанализировать полученный результат.

Рассмотрим, для полноты картины, задачу, когда при той же системе ограничений и той же целевой функции требуется найти не максимальное, а минимальное ее значение. В этой ситуации все рассуждения, связанные с построением области допустимых планов и градиента, полностью сохраняются. Однако для нахождения оптимального плана следует теперь смещать линию уровня до крайнего положения в направлении, противоположном градиенту. Оптимальным планом для задачи на минимум окажется точка O – начало координат. Оптимум будет равен 0.

В следующих заданиях изучаются различные модификации условий конкретной ситуации с производством *Печенья* и *Бисквитов*.

Задание 1.3. Модификации графического анализа

Предположим, что спрос на печенье ограничен и составляет 1000 кг за плановый период.

1. Введите это условие в математическую модель задачи.
2. Изобразите это условие на чертеже.
3. Определите новый оптимальный план и оптимум.

Предположим, что по заключенным ранее договорам фирма обязалась произвести и продать 1000 кг бисквитов.

4. Введите это условие в математическую модель задачи.
5. Изобразите это условие на чертеже.
6. Определите новый оптимальный план и оптимум.

Задачи постоптимизационного анализа

После математического решения задачи линейного программирования, расчета ее оптимального плана и оптимума, необходимо проанализировать полученные результаты. Такой анализ называют постоптимизационным.

Общая задача такого анализа – определить ***устойчивость*** полученного решения к тому или иному изменению ситуации, к изменению условий задачи, а также оценить ***чувствительность*** решения к изменению конкретных численных значений тех или иных параметров ситуации.

Обычно результаты анализа охватывают несколько разделов. Важность тех или иных разделов зависит от конкретной экономической ситуации, описываемой в задаче.

Теневая цена ресурса

Во-первых, необходимо выявить, на границах каких ограничений находится оптимальная точка. Эти ограничения выполняются как равенства (***связанные***, или ***активные,*** ограничения), остальные – как строгие неравенства (***несвязанные***, ***неактивные*** ограничения). Это важная информация.

Для задачи производственного планирования ограничения соответствуют ресурсам. Равенство левой и правой частей ограничения, его активность означает полное использование данного ресурса. Строгое неравенство – неполное использование ресурса.

В нашем примере связанными являются ограничения по *Муке* и *Сахару*. Оптимальный план лежит на пересечении границ по этим ресурсам. Эти два ресурса используются полностью. Остальные избыточны.

Знание того, какие ресурсы как используются, определяет узкие места в обеспечении производственного процесса и возможность маневра. Можно, например, продать излишки ресурсов для получения дополнительного дохода. Можно, наоборот, докупить дополнительные объемы тех ресурсов, которые используются полностью. Эти новые объемы вместе с оставшимися излишками других ресурсов позволят выпустить дополнительную продукцию и получить дополнительный доход. Для того чтобы оценить выгодность такого решения, следует оценить величину такого дополнительного дохода, то есть величину предельной эффективности ресурсов. Величина предельной эффективности называется также ***теневой ценой*** (или ***двойственной оценкой***) ресурса.

Предположим, что доступный объем *Муки* незначительно увеличился с 825 кг до 825 + Δ (например, на 1 кг, так что $\Delta = 1$). Это соответствует небольшому сдвигу прямой A_1A_2 на рис. 1.8 вправо. Область допустимых планов расширилась, производственные условия стали свободнее, и это может привести разве лишь к увеличению выручки. Оптимальный план, оставаясь на пересечении тех же границ по *Муке* и *Сахару* (линий A_1A_2 и D_1D_2) сместится по прямой D_1D_2 направо-вниз. Это соответствует увеличению производства *Печенья* (смещение направо) при одновременном уменьшении производства *Бисквитов* (смещение вниз). В результате несложных расчетов получим новый план, предписывающий производить больше *Печенья* на 3,333×Δ кг и меньше *Бисквитов* на 2,222×Δ кг. Дополнительная выручка при этом равна 46,67×Δ руб.

Таким образом, если запас *Муки* изменится на величину Δ, то выручка изменится на величину 46,67×Δ руб. Дополнительная единица ресурса позволяет увеличить выручку на 46,67 руб. Эта величина 46,67 руб. и есть теневая цена *Муки*.

Аналогичный расчет показывает, что теневая цена *Сахара* составляет 43,33 руб. Теневые цены всех остальных ресурсов равны 0. Действительно, остальные ресурсы в нашей ситуации избыточны, так что их приращение не вызовет изменение оптимального плана и оптимума.

Отметим, что теневая цена является внутренней характеристикой ресурса в сложившейся производственной ситуации и не отражает ценность данного ресурса во внешней среде, его рыночную цену.

Теневая цена определяет оценку чувствительности оптимума к изменению правых частей ограничений.

Сопоставление теневой и рыночной цены может служить основанием для принятия решения о закупке дополнительных объемов данного ресурса (если теневая цена больше рыночной) или о продаже части ресурса (если теневая цена меньше рыночной). В решениях такого рода важным является вопрос о границах действия теневой цены, а, тем самым, и о разумных объемах купли-продажи ресурса.

Критические границы и допустимые изменения ресурса

Если в нашем примере постепенно увеличивать запас *Муки,* то оптимальный план будет смещаться, оставаясь на пересечении границ по *Муке* и *Сахару* (по линии D_1D_2 на рис. 1.8). Так будет продолжаться до тех пор, пока он не дойдет до точки N – точки пересечения границ по *Сахару* и *Маслу* (линий D_1D_2 и B_1B_2). В точке N пересекутся три границы: по *Муке*, *Маслу* и *Сахару*.

Этот момент является критическим. Дальнейшее увеличение запаса *Муки* приведет к избыточности данного ресурса. Он станет несвязанным, его теневая цена будет равна 0. Связанным станет *Масло*. Таким образом, в наборе связанных ресурсов, после прохождения критического положения границы, один ресурс будет заменен другим, два этих ресурса изменят свой статус.

На рис. 1.9 укрупненно представлен фрагмент рис. 1.8 (изменены шкалы значений по горизонтальной и вертикальной оси, но сохранены обозначения A_1A_2, B_1B_2 …, соответствующие ресурсам). Смещенная линия A_1A_2 по ресурсу *Мука*, в своем верхнем критическом положении изображена штрих-пунктирной линией, проходящей через точку N.

Расчет критической границы по *Муке* можно провести следующим образом. Сначала определим координаты точки пересечения границ по *Сахару* и *Маслу*.

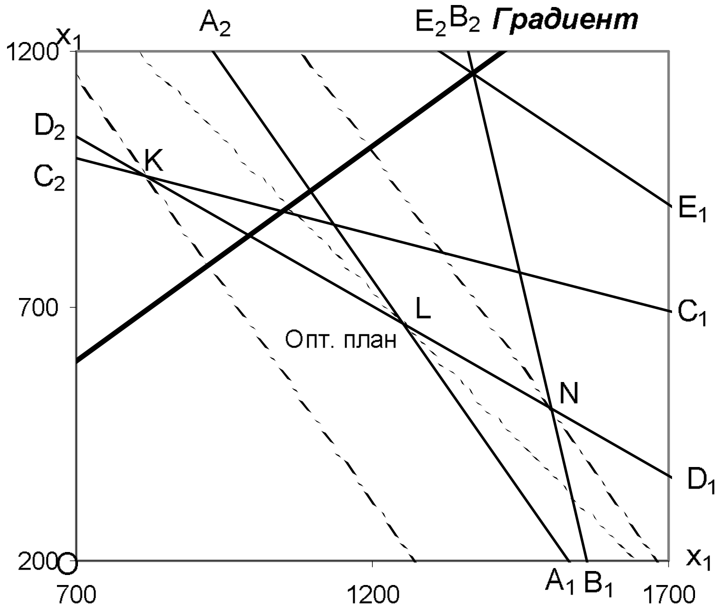


Рис. 1.9. Критические границы ресурса

Для этого следует решить соответствующую систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}06x_2 = 480 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 = 450 \end{cases}.$$

В результате получим

$$x_1 = 1500,\ \ x_2 = 500.$$

Подставим эти значения в левую часть неравенства, определяющего ограничение по *Муке*:

$$0{,}5\times1500 + 0{,}3\times500 = 900.$$

Полученная величина 900 и является ***верхней критической границей*** по ресурсу *Мука*. Таким образом, исходный объем *Муки,* равный 825 кг, можно увеличить на 75 кг без изменения статуса ограничений и без изменения теневой цены ресурса. Величина 75 кг в этом примере является ***допустимым увеличением*** *Муки*.

Нижняя критическая граница и, соответственно, ***допустимое уменьшение*** вычисляются аналогично. В нашем примере при уменьшении объема *Муки* оптимальный план будет смещаться налево-вверх по границе *Сахара* (линия D_1D_2 на рис. 1.9). Критическим будет такая величина объема ресурса *Мука*, при которой линия *Муки* пройдет через точку пересечения K границ по *Сахару* и *Яйцу* (линии C_1C_2 и D_1D_2). Это нижнее критическое положение границы изображено рис. 1.9 штрих-пунктирной линией, проходящей через точку K.

При дальнейшем уменьшении доступного объема *Муки* произойдет изменение статуса некоторых ограничений. Именно, связанными ресурсами станут *Мука* и *Яйцо*, а *Сахар* станет несвязанным, и его теневая цена будет равна 0.

Для вычисления координат точки K решим соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}18x_1 + 0{,}6x_2 = 720 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 = 450 \end{cases}.$$

В результате получим

$$x_1 = 818{,}182, \qquad x_2 = 954{,}545.$$

Подставим эти значения в левую часть неравенства, определяющего ограничение по *Муке*:

$$0{,}5 \times 818{,}182 + 0{,}3 \times 954{,}545 = 695{,}455.$$

Величина 695,455 есть ***нижняя критическая граница*** ресурса *Мука*. ***Допустимое уменьшение*** данного ресурса определяется разностью

$$825 - 695{,}455 = 129{,}545.$$

Таким образом, при изменении доступного объема *Муки* теневые цены и статус ресурсов сохраняются, если объем *Муки* остается между вычисленными критическими границами. При переходе через одну из границ происходит изменение статуса и теневых цен ресурсов.

Аналогично могут быть определены критические границы по остальным ограничениям. Для избыточных ресурсов (их теневая цена равна 0) верхней границы не существует, такой ресурс при любом увеличении объема остается избыточным.

Напомним, что координатные оси являются граничными прямыми ограничений $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Таким образом, в некоторых ситуациях прохождение через критическую границу может привести к тому, что производство одного из продуктов прекратится (оптимальное значение одной из переменных x_1, x_2 станет равным 0) или возобновится (оптимальное значение одной из переменных x_1, x_2 станет больше 0).

Критические границы ресурсов соответствуют границам устойчивости статуса ограничений при изменении их правых частей.

Ценовой анализ

Изменение оптимального плана может быть связано с изменением цен на продукцию (коэффициентов при переменных в целевой функции). В рассматриваемой модели цены считаются неизменными. При небольших изменениях цен оптимальный план обычно сохраняет свою оптимальность. При существенных изменениях цен оптимальным становится другой план. Важно разобраться в этом, рассчитать критические ценовые границы. Такое изучение воздействия ценовых изменений на оптимальный план и оптимум относят к ценовому постоптимизационному анализу.

Обратимся к нашему примеру. Цена *Печенья* составляет 32 руб. за кг. Предположим, что отпускная цена изменилась, и теперь *Печенье* продается по другой цене. Следует ожидать, что при этом изменится выручка от продаж. Однако изменится ли оптимальный план?

Небольшое изменение этой цены приведет к незначительному повороту градиента (вместе со всей системой перпендикулярных ему линий уровня целевой функции). В результате оптимальный план останется в прежней точке (рис. 1.8). При более значительном изменении цены он перейдет в другую вершину области допустимых планов.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Предположим, что цена *Печенья* увеличивается. Это соответствует повороту градиента по часовой стрелке. Вместе с ним поворачивается и перпендикулярная ему линия уровня (пунктирная линия на рис. 1.8). При небольшом повороте оптимальный план остается в первоначальной точке L. При достаточно большом повороте оптимальный план перейдет в точку M, находящуюся на пересечении границ по *Муке* и *Маслу* (линий A_1A_2 и B_1B_2).

Критическая величина цены, при которой происходит переход оптимального плана из одной точки в другую, соответствует положению, когда линия уровня целевой функции параллельна прямой A_1A_2 (а градиент, соответственно, перпендикулярен этой прямой). Условием параллельности прямых является пропорциональность коэффициентов при переменных в двух уравнениях: линии уровня целевой функции и границы по *Муке*. Составим пропорцию с неизвестной ценой c_1 первого продукта (*Печенья*):

$$\frac{c_1}{0{,}5} = \frac{27}{0{,}3}.$$

Отсюда получаем $c_1 = 45$. Таким образом, при увеличении цены *Печенья* с первоначальных 32 до 45 руб. за кг (и при сохранении цены *Бисквитов*) оптимальный план остается неизменным, по-прежнему следует производить 1250 кг *Печенья* и 666,667 кг *Бисквитов*. Если же цена поднимется выше 45 руб., то оптимальным планом станет точка M, находящаяся на пересечении границ по *Муке* и *Маслу* (линий A_1A_2 и B_1B_2). Ее координаты можно определить решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 = 825 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}06x_2 = 480, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 1575$, $x_2 = 125$.

При цене *Печенья*, в точности равной 45 руб., оптимальным является как первоначальный план L, так и новый план M, а также и все точки, лежащие на отрезке LM. В этом случае задача имеет бесконечно много оптимальных планов. Разумеется, все эти разные планы производства обеспечивают в точности одну и ту же величину выручки от продаж.

Так, план L соответствует выручке:

$$45 \times 1250 + 27 \times 666{,}667 = 74250 \text{ (руб.)}.$$

План M соответствует той же величине выручки:

$$45 \times 1575 + 27 \times 125 = 74250 \text{ (руб.)}.$$

Верхняя критическая граница цены *Печенья* равна 45. Отсюда следует, что ***допустимое увеличение*** первоначальной цены равно 13.

Аналогичным образом рассчитывается нижняя граница цены первого продукта. При уменьшении цены *Печенья* градиент вместе с линиями уровня будет поворачиваться против часовой стрелки. При достаточно сильном повороте оптимальный план перейдет в точку K с координатами

$$x_1 = 818{,}182, \qquad x_2 = 954{,}545.$$

Критическое положение определяется из условия параллельности линии уровня целевой функции и линии *Сахара* D_1D_2. Составим пропорцию:

$$\frac{c_1}{0{,}2} = \frac{27}{0{,}3},$$

решив которую получим $c_1 = 18$.

Мы получили ***нижнюю критическую границу*** цены *Печенья*, равную 18 руб. ***Допустимое уменьшение*** первоначальной цены *Печенья*, равной 32 руб., составляет 14 руб.

Таким образом, при произвольных изменениях цены *Печенья* между нижней и верхней критическими границами, то есть между 18 и 45 руб., оптимальный план остается прежним: по-прежнему следует производить 1250 кг *Печенья* и 666,667 кг *Бисквитов*. При выходе цены за верхнюю или нижнюю критические границы оптимальный план изменится, вместе с ним изменится и статус ресурсов.

Аналогичным образом вычисляются нижняя и верхняя границы по второму продукту – *Бисквитам*. Отметим, что изменение цены по разным продуктам по-разному воздействует на направление поворота градиента. При увеличении цены второго продукта градиент поворачивается против часовой стрелки, а при уменьшении – по часовой стрелке.

Расчеты показывают, что верхняя критическая граница цены *Бисквитов* равна 48 руб., так что допустимое увеличение составляет 21 руб. При преодолении этой границы оптимальный план переходит из точки L в точку K.

Нижняя критическая граница цены *Бисквитов* равна 19,20 руб., допустимое уменьшение составляет 7,80 руб. При переходе через эту границу оптимальный план переходит из точки L в точку M.

Критические границы цен соответствуют границам устойчивости оптимального плана при изменении коэффициентов целевой функции.

Решение задачи линейного программирования средствами Excel

Характеристика симплекс-метода

Мы познакомились выше с графическим методом решения задач линейного программирования. Это простой, наглядный и удобный метод, обладающий лишь одним, но существенным недостатком: он пригоден только для задач с двумя переменными. Уже для трех переменных графики пришлось бы изображать в трехмерном пространстве, наглядность и простота были бы в существенной мере потеряны. Для большего числа переменных этот метод и вовсе непригоден.

Обычно в экономико-математической модели присутствует большое число переменных. Номенклатура выпуска крупного предприятия насчитывает сотни и тысячи наименований. Возникает потребность в универсальном методе решения задач линейного программирования, пригодном для любого числа переменных и ограничений, для задач любой размерности. В настоящее время разработаны разнообразные методы решения произвольных задач линейного программирования. В основе большинства из них лежит так называемый симплекс-метод.

Симплекс-метод представляет собой алгоритм решения задачи, то есть четко описанную процедуру последовательных эквивалентных преобразований исходной математической модели методом Гаусса. В результате этих преобразований получают либо такую форму модели, из которой непосредственно извлекается оптимальный план (если он существует), либо такую форму, из которой непосредственно обнаруживается неразрешимость задачи (если оптимальный план не существует).

В последовательности преобразований модели выделяют этапы. Результатом этапа является такая форма записи модели, с которой непосредственно связан один из допустимых планов задачи – так называемый текущий опорный план. Текущий опорный план геометрически представляет собой одну из вершин многогранной области допустимых планов. Движению по этапам симплекс-метода соответствует переход от одного текущего опорного плана к другому, от одной вершины области к соседней. При каждом таком переходе значение целевой функции улучшается (во всяком случае, не ухудшается). Цепочка преобразований последовательно приближает нас к оптимальному плану. Мы приходим либо к ситуации, когда текущим опорным планом становится оптимальный план, оптимальная вершина области допустимых планов, либо к ситуации, когда по четко сформулированным признакам мы непосредственно убеждаемся в неразрешимости задачи.

Симплекс-метод непосредственно применяется к задаче линейного программирования в канонической форме, с ограничениями-равенствами и неотрицательными переменными.

Любую задачу линейного программирования можно привести в канонической форме.

Пример решения задачи линейного программирования симплекс-методом

Подготовка модели, базисные переменные, текущий опорный план

Вернемся к ситуации ПАРИС. Напомним математическую модель задачи:

$$\max \quad (32x_1 + 27x_2)$$

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 \le 825 \\ 0,3x_1 + 0,06x_2 \le 480 \\ 0,18x_1 + 0,6x_2 \le 720 \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 \le 450 \\ 0,07x_1 + 0,09x_2 \le 200 \\ 0,015x_1 + 0,006x_2 \le 40 \\ 0,0075x_1 + 0,015x_2 \le 40 \\ 0 \le x_1 \le 3000 \\ 0 \le x_2 \le 3000 \end{cases}$$

Приведем ее к канонической форме. Получим:

$$\max \quad (32x_1 + 27x_2)$$

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 \quad + \quad x_3 = 825 \\ 0,3x_1 + 0,06x_2 \quad + \quad x_4 = 480 \\ 0,18x_1 + 0,6x_2 \quad + \quad x_5 = 720 \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 \quad + \quad x_6 = 450 \\ 0,07x_1 + 0,09x_2 \quad + \quad x_7 = 200 \\ 0,015x_1 + 0,006x_2 \quad + \quad x_8 = 40 \\ 0,0075x_1 + 0,015x_2 \quad + \quad x_9 = 40 \\ x_1 \quad + \quad x_{10} = 3000 \\ x_2 \quad + \quad x_{11} = 3000 \\ x_1, \dots \quad x_{11} \ge 0 \end{cases}$$

Новые переменные x_3, … x_9 имеют смысл неиспользованных объемов ресурсов. Переменные x_{10}, и x_{11} – объемы неудовлетворенного спроса. Каждая такая переменная присутствует лишь в одном ограничении, причем коэффициент при ней равен 1.

Такой набор переменных, где в каждом ограничении присутствует ровно одна переменная из набора и каждая переменная из набора присутствует ровно в одном ограничении, причем с коэффициентом 1, называется ***базисным набором*** переменных. Переменные, входящие в этот набор, называются ***базисными переменными***. Остальные переменные задачи называются ***небазисными***. В нашем случае базисные переменные – это x_3, … x_{11}. Небазисные переменные – это x_1, x_2.

В симплекс-методе базисные переменные играют особую роль. На их основе строится текущий опорный план.

Текущий опорный план определяется следующим образом. Каждая базисная переменная полагается равной правой части своего ограничения (того единственного ограничения, в которое входит данная переменная). Все небазисные переменные полагаются равными 0.

В нашем примере текущий опорный план имеет следующие компоненты:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 825$, $x_4 = 480$, $x_5 = 720$, $x_6 = 450$, $x_7 = 200$, $x_8 = 40$ $x_9 = 40$, $x_{10} = 3000$, $x_{11} = 3000$.

В векторной записи это 11-мерный вектор X^0:

$$X^0 = (0;\ 0;\ 825;\ 480;\ 720;\ 450;\ 200;\ 40;\ 40;\ 3000;\ 3000).$$

Поскольку именно с этого плана начинается дальнейшее построение последовательности текущих опорных планов, его называют также ***начальным опорным планом***.

Очевидно, план X^0 является допустимым, он удовлетворяет всем ограничениям системы. Чтобы получить его образ в системе координат с переменными x_1, x_2, достаточно изобразить точку, определяемую его первыми двумя компонентами. Плану X^0 соответствует точка (0; 0), начало координат, одна из вершин области допустимых планов.

Обращение к чертежу, однако, не является необходимым. Более того, симплекс-метод ориентирован в первую очередь именно на решение многомерных задач, когда чертежи не приносят пользы. Все же мы будем иногда ссылаться на чертеж, просто чтобы придать рассуждениям большую наглядность и сопоставить результаты с теми, которые были получены графическим методом.

Обозначим целевую функцию буквой z. Это означает, что в качестве целевой функции будет использоваться выражение, состоящее из одной-единственной переменной z. К системе ограничений при этом будет добавлено равенство

$$z = 32x_1 + 27x_2$$

в равносильной форме

$$z - 32x_1 - 27x_2 = 0 .$$

В результате математическая модель примет следующий вид:

$$\max \quad z$$

$$\begin{cases} 0,5\,x_1 + 0,43x_2 + x_3 = 825 & (1) \\ 0,3\,x_1 + 0,06\,x_2 + x_4 = 480 & (2) \\ 0,18\,x_1 + 0,6\,x_2 + x_5 = 720 & (3) \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 + x_6 = 450 & (4) \\ 0,07x_1 + 0,09x_2 + x_7 = 200 & (5) \\ 0,015x_1 + 0,006x_2 + x_8 = 40 & (6) \\ 0,0075x_1 + 0,015x_2 + x_9 = 40 & (7) \\ x_1 + x_{10} = 3000 & (8) \\ x_1 + x_{11} = 3000 & (9) \\ z - 32x_1 - 27x_2 = 0 & (m+1) \\ x_1 \ge 0 \quad , \quad \ldots \quad x_{11} \ge 0 & \end{cases}$$

Новое ограничение, порождаемое целевой функцией, является десятым по счету. Это новое ограничение будет играть в решении задачи особую роль.

В общей форме записи задачи присутствует m ограничений. Новое ограничение получает при этом номер m + 1. Чтобы подчеркнуть его особую роль, мы сохраняем этот его общий номер m + 1 вместо номера 10.

На основе этого ограничения устанавливается критерий (признак) оптимальности текущего опорного плана. Это ограничение часто называют ***критериальным***.

Рассмотрим значение целевой функции z на опорном плане X^0. Для этого подставим значение компонент плана X^0 в критериальное (m + 1) -е ограничение. Получим $z^0 = 0$. Является ли это значение максимально возможным? Другими словами, мешает ли что-нибудь увеличению значения z?

Анализ оптимальности плана: разрешающие столбец, строка, элемент

В системе ограничений переменная z присутствует лишь в критериальном ограничении. При увеличении z это ограничение-равенство не должно нарушаться. Поскольку в это равенство входят переменные x_1 и x_2 с отрицательными коэффициентами, то увеличение z можно компенсировать увеличивая, например, значение одной из переменных, x_1 или x_2 в соответствующей пропорции.

Заметим сразу, что если бы все переменные x_j, входили бы в критериальное ограничение с неотрицательными коэффициентами, то увеличить значение z было бы невозможно. Это означает, что текущий опорный план был бы оптимальным. Тем самым мы получили ***критерий оптимальности*** текущего опорного плана.

Рассмотрим увеличение значения z и одновременное компенсирующее увеличение значения одной из переменных, например, x_1.

Существуют ли какие-нибудь препятствия увеличению значения x_1? Если таких препятствий нет, если значение x_1 можно увеличивать неограниченно, то неограниченно можно увеличивать и значение z. Это означает, что целевая функция на множестве допустимых планов неограниченна, любой план может быть улучшен, самого лучшего, оптимального плана, дающего максимальное значение целевой функции, не существует.

Задача в этом случае решения не имеет. Мы получили ***критерий неразрешимости*** задачи ввиду неограниченности целевой функции.

В нашем случае это не так. Переменная x_1 входит и во все остальные ограничения, каждое из которых может создавать свои препятствия росту ее значения. Рассмотрим эти ограничения поочередно.

В первое равенство x_1 входит с коэффициентом 0,5. Коэффициент положителен. Для того чтобы выполнялось первое равенство, рост x_1 должен компенсироваться уменьшением других переменных. Но значение переменной x_2 и так равно 0. Отрицательными значения переменных быть не могут.

Следовательно, рост x_1 должен компенсироваться уменьшением базисной переменной x_3 в соответствующей пропорции. Однако значение x_3 не может уменьшаться беспредельно, нижней границей значений переменных является 0. Таким образом, значение x_1 может расти лишь до некоторой верхней границы. Ее можно определить, положив в первом ограничении все остальные переменные равными 0.

Получим

$$0,5x_1 = 825 \quad ,$$

откуда

$$x_1 = \frac{825}{0,5} = 1650.$$

Поскольку x_3 – базисная переменная, она не входит в другие равенства и изменение ее значения никак не затрагивает остальные ограничения.

Первое ограничение дает возможность роста переменной x_1 до величины 1650. Другими словами, доступные объемы первого ресурса (*Муки*) позволяют, при наличии достаточных объемов других ресурсов, произвести 1650 кг первого продукта (*Печенья*).

Отметим, что если бы коэффициент при x_1 был отрицателен или равен 0, то такое равенство не формировало бы ограничение на рост значений переменной x_1.

Во втором ограничении рост значения переменной x_1 должен компенсироваться уменьшением значения другой базисной переменной x_4.

Рассуждая аналогичным образом, получим новую верхнюю границу роста значений переменной x_1:

$$x_1 = \frac{480}{0,3} = 1600.$$

Остальные ограничения дают следующие границы роста переменной x_1:

$$x_1 = 4000;\ x_1 = 2250;\ x_1 = 2858;\ x_1 = 2667\ x_1 = 5333;\ x_1 = 3000,\ x_1 = \infty.$$

При росте значения переменной x_1 должны выполняться все ограничения. Это означает, что из всех полученных неотрицательных верхних границ нужно выбрать наименьшую:

$$\min\{1650;\ 1600;\ 4000;\ 2250;\ 2858;\ 2667;\ 5333;\ 3000\} = 1600.$$

Значение переменной x_1 может быть поднято до величины 1600. Из критериального ограничения следует, что значение целевой функции z при этом вырастает от 0 до 51200.

Однако процесс решения задачи на этом не заканчивается. Возможно, значение целевой функции z можно поднять еще выше. Чтобы разобраться с этим вопросом и подготовить запись системы ограничений к дальнейшему анализу, следует ее преобразовать.

В основе преобразования лежит метод Гаусса. Этим методом пересчитываются коэффициенты при переменных и свободные члены ограничений.

Мы анализировали возможности роста переменной x_1. Столбец коэффициентов при этой переменной в процессе преобразований называется ***разрешающим столбцом***. Этот столбец представлен ниже.

$$\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,18 \\ 0,2 \\ 0,07 \\ 0,015 \\ 0,0075 \\ 1 \\ 0 \\ -32 \end{pmatrix}$$

Элементы этого столбца участвовали в определении наименьшей границы роста переменной x_1. Каждое ограничение дало свою границу, но наименьшая среди них (равная 1600) возникла во втором ограничении.

Поэтому само это второе ограничение в процессе дальнейших преобразований будет называться ***разрешающим ограничением*** (***разрешающей строкой***), а элемент 0,3, находящийся на пересечении разрешающих столбца и строки, будет называться ***разрешающим элементом***. Это тот самый элемент, при делении на который в правой части ограничения возникла наименьшая граница.

Целью эквивалентного преобразования системы ограничений методом Гаусса является приведение системы к такому виду, когда переменная x_1 становится базисной, причем на месте разрешающего элемента возникает 1, а на месте всех остальных элементов разрешающего столбца возникают нули.

Для этого сначала разрешающая строка (разрешающее равенство) делится на разрешающий элемент. В нашем случае вторая строка делится на 0,3.

Мы не будем здесь и в дальнейшем дописывать неравенства, требующие неотрицательности переменных xj. Эти требования будут постоянно подразумеваться.

Первое преобразование системы ограничений

Приступим к преобразованию системы ограничений методом Гаусса. Разделим вторую строку на 0,3. Получим:

$$x_1 + 0,2x_2 + 3,333x_3 = 1600.$$

На месте разрешающего элемента возникла 1. Теперь преобразуем поочередно все остальные строки так, чтобы остальные элементы разрешающего столбца стали равны 0.

Для преобразования первой строки следует из нее вычесть преобразованную разрешающую строку, умноженную предварительно на 0,5. Получим

$$0,2x_2 + x_3 – 1,667x_4 = 25.$$

Аналогично преобразуются остальные строки. В итоге получим новую, преобразованную систему ограничений:

$$\begin{cases} 0,2x_2 + x_3 - 1,667x_4 = 25, \\ x_1 + 0,2x_2 + 3,333x_4 = 1600, \\ 0,564x_2 - 0,6x_4 + x_5 = 432, \\ 0,26x_2 - 0,667x_4 + x_6 = 130, \\ 0,076x_2 - 0,233x_4 + x_7 = 88, \\ 0,003x_2 - 0,05x_4 + x_8 = 16, \\ 0,0135x_2 - 0,025x_4 + x_9 = 28, \\ -0,2x_2 - 3,333x_4 + x_{10} = 1400, \\ x_2 + x_{11} = 3000, \\ z - 20,6x_2 + 106,67x_4 = 51200. \end{cases}$$

Напомним, что метод Гаусса осуществляет эквивалентное преобразование системы уравнений, так что мы получим лишь новую форму записи все той же системы ограничений.

В новой записи переменные x_1, x_3, x_5, … x_{11} являются базисными, x_2 и x_4 – небазисными. В наборе базисных переменных произошло изменение: переменная x_4 вышла из этого набора, а переменная x_1 вошла вместо нее в набор.

Преобразованной системе ограничений соответствует новый текущий опорный план X^1:

$$X^1 = (1600;\ 0;\ 25;\ 0;\ 432;\ 130;\ 88;\ 16;\ 28;\ 1400;\ 3000).$$

Этому плану соответствует новое значение целевой функции

$$z^1 = 51200.$$

Если обратиться к графикам, то план X^1 соответствует вершине B_1. При переходе от X^0 к X^1 мы перешли от вершины О (начала координат) к соседней вершине B_1. Этой вершине соответствует производственный план, предписывающий произвести 1600 кг первого продукта (*Печенья*) и 0 кг второго (*Бисквитов*). При этом выручка, значение целевой функции, равно 51200, то есть равно z^1. Значения переменных x_3, … x_{11} в плане X^1 соответствуют остаткам ресурсов или неудовлетворенному спросу.

План X^1 не является оптимальным, так как в последней записи системы ограничений в критериальной строке присутствует отрицательный коэффициент при одной из переменных – при x_2. Преобразование системы ограничений следует продолжить.

Последующие преобразования системы ограничений

На новом, втором этапе разрешающим является столбец коэффициентов при переменной x_2. Для каждого из ограничений, кроме критериального, определяем отношение правой части к элементу разрешающего столбца и находим среди этих отношений наименьшее:

$$\min\{125; 8000; 766; 500; 1158; 5333; 2074; 3000\} = 125.$$

Наименьшим является первое отношение. Следовательно, первая строка становится разрешающей строкой, а число 0,2 – разрешающим элементом.

Преобразуем новую систему ограничений методом Гаусса так, чтобы на месте разрешающего элемента возникла 1, а на месте всех остальных элементов разрешающего столбца появилась 0.

В результате преобразования переменная x_3 выйдет из базисного набора, а переменная x_2 войдет в набор вместо нее. В новый базисный набор войдут все переменные, за исключением x_3 и x_4.

Новым текущим опорным планом будет X^2,

$$X^2 = (125; 1575; 0; 0; 362; 98; 79; 16; 26; 1425; 2875),$$

предписывающий изготовление 125 кг *Печенья* и 1575 кг *Бисквитов* и соответствующий точке M на чертеже (рис. 1.8). Остальные компоненты плана соответствуют неиспользованным объемам ресурсов и неудовлетворенному спросу.

Реализация этого плана принесет выручку 53775 руб. При этом в критериальной строке присутствует отрицательный коэффициент (при переменной x_4), так что выручка не максимальна и план не оптимален.

Преобразование системы ограничений методом Гаусса приводит к изменению набора базисных переменных (из него выйдет переменная x_6 и войдет переменная x_4). Новым опорным планом станет X^3:

$$X^3 = (667; 1250; 0; 95; 65; 0; 53; 17; 21; 1750; 2333).$$

Этот план является оптимальным, поскольку в критериальной строке отсутствуют отрицательные элементы. Он предписывает изготовление 667 кг *Печенья* и 1250 кг *Бисквитов*. План соответствует точке L на чертеже (рис. 1.8). При этом полностью используется *Мука* и *Сахар*, остаются недоиспользованными *Масло* и *Яйцо*, а также трудовые ресурсы, производственные мощности. Неудовлетворенный спрос составляет 1750 кг по *Печенью* и 2333 кг по *Бисквитам*.

Выручка при этом составит 58000 руб. Это максимальная выручка, доступная в нашей ситуации.

Пример табличной формы симплекс-метода

Мы рассмотрели симплекс-метод в виде преобразования системы ограничений. Однако обычно его используют в форме преобразования специальных таблиц (так называемых симплексных таблиц).

В левой части такой таблицы имеются три столбца. Столбец «№» содержит номера строк таблицы. Столбец «$X_б$» содержит список базисных переменных в соответствии со строками. Столбец «$C_б$» содержит список коэффициентов, с которыми базисные переменные входят в целевую функцию.

Правая часть таблицы начинается со столбца «B». В нем записаны по порядку свободные члены ограничений.

Каждый из последующих столбцов соответствует своей переменной. Элементами столбца являются коэффициенты, с которыми данная переменная входит в ограничения задачи. Сверху над обозначением переменной указывается величина соответствующего коэффициента в целевой функции. Переменная z в таблице не участвует.

Строки таблицы соответствуют ограничениям задачи. Критериальная строка имеет номер m+1. Приведенные нами преобразования системы ограничений методом Гаусса сводятся к преобразованию таблиц этим же методом. Последовательно возникающие системы ограничений соответствуют последовательным таблицам. В нашем примере это таблицы 1.7–1.10. Отмечен разрешающий элемент, играющий ключевую роль в процессе преобразований.

Таблица 1.7

Начальная таблица решения задачи симплекс-методом

				32	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0
№	$X_б$	$C_б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1	x_3	0	825	0,5	0,3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	x_4	0	480	0,3	0,06	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	x_5	0	720	0,18	0,6	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	x_6	0	450	0,2	0,3	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	x_7	0	200	0,07	0,09	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	x_8	0	40	0,015	0,006	0	0	0	0	0	1	0	0	0
7	x_9	0	40	0,008	0,015	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	x_{10}	0	3000	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	x_{11}	0	3000	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
m+1			**0**	***-32***	***-27***	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Таблица 1.8

Вторая таблица решения задачи симплекс-методом

				32	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0
№	$X_б$	$C_б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1	x_3	0	25	0	0,2	1	-1,667	0	0	0	0	0	0	0
2	x_1	32	1600	1	0,2	0	3,333	0	0	0	0	0	0	0
3	x_5	0	432	0	0,564	0	-0,600	1	0	0	0	0	0	0
4	x_6	0	130	0	0,26	0	-0,667	0	1	0	0	0	0	0
5	x_7	0	88	0	0,076	0	-0,233	0	0	1	0	0	0	0
6	x_8	0	16	0	0,003	0	-0,050	0	0	0	1	0	0	0
7	x_9	0	28	0	0,014	0	-0,025	0	0	0	0	1	0	0
8	x_{10}	0	1400	0	-0,2	0	-3,333	0	0	0	0	0	1	0
9	x_{11}	0	3000	0	1	0	0,000	0	0	0	0	0	0	1
m+1			**51200**	**0**	***-20,6***	**0**	**106,7**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Таблица 1.9

Третья таблица решения задачи симплекс-методом

				32	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0
№	$X_б$	$C_б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1	x_2	27	125	0	1	5	-8	0	0	0	0	0	0	0
2	x_1	32	1575	1	0	-1	5	0	0	0	0	0	0	0
3	x_5	0	362	0	0	-3	4	1	0	0	0	0	0	0
4	x_6	0	98	0	0	-1	2	0	1	0	0	0	0	0
5	x_7	0	79	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	x_8	0	16	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
7	x_9	0	26	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	x_{10}	0	1425	0	0	1	-5	0	0	0	0	0	1	0
9	x_{11}	0	2875	0	0	-5	8	0	0	0	0	0	0	1
m+1			**53775**	**0**	**0**	**103**	***-65***	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Таблица 1.10

Завершающая таблица решения задачи симплекс-методом

				32	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0
№	$X_б$	$C_б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1	x_2	27	667	0	1	-2	0	0	6	0	0	0	0	0
2	x_1	32	1250	1	0	3	0	0	-3	0	0	0	0	0
3	x_5	0	95	0	0	1	0	1	-3	0	0	0	0	0
4	x_4	0	65	0	0	-1	1	0	1	0	0	0	0	0
5	x_7	0	53	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	x_8	0	17	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
7	x_9	0	21	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	x_{10}	0	1750	0	0	-3	0	0	3	0	0	0	1	0
9	x_{11}	0	2333	0	0	2	0	0	-6	0	0	0	0	1
m+1			**58000**	**0**	**0**	**46,67**	**0**	**0**	**43,33**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Симплекс-метод для общего случая

Предварительная подготовка модели

Перейдем теперь к общему случаю решения задачи линейного программирования симплекс-методом. Первое, что следует сделать, – это привести задачу к канонической форме.

Далее нужно проверить, что все правые части ограничений неотрицательны. Если это не так, то обе части соответствующих равенств следует умножить на (-1). Затем проверить наличие в записи задачи базисного набора переменных. Если такой набор присутствует, то по записи задачи нужно заполнить симплексную таблицу. Если базисный набор отсутствует, то следует перейти к вспомогательной задаче с искусственным набором базисных переменных и по записи этой вспомогательной задачи заполнить симплексную таблицу.

Строение симплексной таблицы

Пусть задача после всех необходимых преобразований имеет вид:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \geq 0, \quad \ldots \quad x_n \geq 0. \end{cases}$$

Симплексная таблица для такой задачи – это таблица, заполненная следующим образом (табл. 1.11).

Строки в этой таблице соответствуют ограничениям задачи, последняя строка – критериальному ограничению. В столбце «№» указан порядковый номер строки, в столбце «$X_б$» – базисные переменные, по одной для каждой строки. В столбце «$C_б$» представлены коэффициенты, с которыми базисные переменные входят в целевую функцию. Дальнейшая часть таблицы, кроме критериальной строки, заполнена той числовой информацией, которая непосредственно представлена в математической модели. А именно: в столбце «B» указаны свободные члены ограничений, а в столбцах «x_1».... «x_n» – коэффициенты при переменных в системе ограничений. Над обозначением переменной «x_1».... «x_n» указаны соответствующие коэффициенты, с которыми эти переменные входят в целевую функцию.

Таблица 1.11

Общий вид таблицы симплекс-метода

№	$X_б$	$C_б$	B	c_1 … x_1	… …	… …	… …	c_n … x_n
1	x_{i1}	c_{i1}	b_1	a_{11}	…	…	…	a_{mn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	x_{im}	c_{im}	b_m	a_{m1}	…	…	…	a_{mn}
m+1			d	Δ_1	…	…	…	Δ_m

Критериальная строка

Элементы критериальной строки вычисляются по следующим формулам:

$$d = \sum_{k=1}^{m} c_{ik} b_k$$

$$\Delta_j = (\sum_{k=1}^{m} c_{ik} a_{kj}) - c_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

Другими словами, для вычисления величины d следует элементы столбца «$C_б$» почленно умножить на соответствующие (находящиеся в той же строке) элементы столбца «Â», а затем все полученные произведения сложить. Для вычисления величины Δ_j следует проделать аналогичную процедуру, но вместо элементов столбца «Â» использовать элементы столбца «x_j» и из результата суммирования вычесть величину c_j, указанную в том же столбце таблицы над обозначением «x_j».

Это полностью соответствует заполнению симплексной таблицы в рассмотренном примере.

Базисные столбцы

Столбцы таблицы, соответствующие базисным переменным (базисные столбцы таблицы), имеют характерную особенность. В таком столбце присутствует ровно одна 1, на остальных местах в столбце стоят 0. Единица находится именно в той строке, в которой в столбце «$X_б$» указана данная базисная переменная. Формула для вычисления величины Δ_j показывает, что такие величины для базисных столбцов будут равны 0, как это можно наблюдать в нашем примере.

Текущий опорный план и текущее значение целевой функции

Текущий опорный план в общем случае определяется следующим образом. Все переменные, участвующие в задаче, разбиваются на две группы – группу базисных и группу небазисных переменных. Базисные переменные перечислены в столбце «$X_б$». Они в текущем опорном плане полагаются равными соответствующим (находящимся в той же строке) элементам столбца «B». Остальные, небазисные переменные полагаются равными 0.

Текущее значение целевой функции равно d (элементу на пересечении критериальной строки и столбца «B»).

Критерий оптимальности текущего опорного плана

Для выяснения вопроса об оптимальности текущего опорного плана следует рассмотреть величины Δ_j, находящиеся в критериальной строке. Если окажется, что все, $\Delta_j \geq 0 \ \ (j=\overline{1,n})$, то текущий опорный план является оптимальным планом, а текущее значение целевой функции является оптимумом. В этом случае задача решена.

Таким образом, признак конца решения задачи состоит в том, что все $\Delta_j \geq 0$. Этот признак называется также ***критерием оптимальности*** текущего опорного плана, а иногда – и критерием оптимальности симплексной таблицы.

Преобразование симплексной таблицы

Общая цель преобразования

Предположим, что задача еще не решена, критерий оптимальности не выполнен. Это означает, что среди величин Δ_j существует хотя бы одна отрицательная.

В этом случае решение задачи следует продолжить. Необходимо изменить содержание таблицы. Новое содержание будет соответствовать новому набору базисных переменных, новому текущему опорному плану, а тем самым и новому значению целевой функции. Среди базисных переменных изменению подвергнется только одна позиция. Ровно одна из базисных переменных выйдет из их набора, станет в результате преобразования небазисной, и ровно одна из небазисных переменных войдет вместо нее в базисный набор.

Геометрический смысл такого преобразования состоит в переходе от одной вершины многогранной области допустимых планов к другой, соседней вершине. Преобразование осуществляется таким образом, чтобы для нового текущего опорного плана, то есть для новой вершины области, значение целевой функции было больше (или, во всяком случае, не меньше), чем для предыдущего текущего опорного плана.

Само преобразование осуществляется методом Гаусса. Он преобразует систему уравнений в равносильную систему. Смысл задачи при таком преобразовании полностью сохраняется, изменяется лишь форма записи системы ограничений и в полном соответствии с этим – содержимое симплексной таблицы.

Опишем последовательность, в которой осуществляется преобразование таблицы.

Разрешающий столбец

Сначала следует выбрать отрицательную величину среди Δ_j (если таких несколько, то можно выбрать любую из них). Пусть индекс выбранной величины есть q, то есть $\Delta_q < 0$. Соответствующему столбцу таблицы, то есть столбцу коэффициентов при переменной x_q, присваивается название разрешающего столбца.

Отметим, что переменная x_q, является небазисной. Если бы она была базисной, то Δ_q было бы равно 0.

В новой таблице, которая возникнет в результате преобразований, переменная x_q окажется в числе базисных переменных.

Разрешающий элемент

Среди элементов a_{iq} разрешающего столбца следует определить разрешающий элемент. Для этого необходимо рассмотреть положительные величины среди a_{iq}. Для каждой из таких положительных величин следует рассмотреть отношение соответствующего элемента столбца «B» к данной величине. Среди отношений нужно выбрать наименьшее. Тот элемент a_{iq} разрешающего столбца, для которого отношение оказалось наименьшим, и является разрешающим элементом.

Другими словами, разрешающий элемент – это тот положительный элемент a_{pq} разрешающего столбца, для которого выполняется условие

$$\frac{b_p}{a_{pq}} = \min_{a_{iq}>0} \frac{b_i}{a_{iq}}.$$

В том случае, если в данном разрешающем столбце наименьшее отношение возникает для нескольких его элементов (в этом случае такие наименьшие отношения, разумеется, равны друг другу), в качестве разрешающего следует выбрать один из таких элементов (любой).

Критерий неограниченности целевой функции

В том случае, если в разрешающем столбце среди его элементов вообще нет положительных, разрешающий элемент не может быть определен. Такая ситуация говорит о том, что целевая функция задачи неограниченна. Для любого допустимого плана в этом случае существует другой допустимый план с более высоким значением целевой функции. Любой план может быть улучшен, самого лучшего, оптимального плана не существует. Продолжать его поиск не имеет смысла. Процесс решения задачи на этом заканчивается.

Таким образом, мы получили еще один признак конца процедуры решения задачи. Он состоит в том, что для некоторого столбца таблицы критерий оптимальности нарушен и при этом среди элементов столбца нет положительных, то есть

$$\Delta_q < 0;\ a_{iq} \le 0;\ (i = \overline{1,m}).$$

Этот признак называется ***критерием неограниченности целевой функции***.

Разрешающая строка

Вернемся к обычной ситуации, когда в разрешающем столбце есть положительные элементы. Та строка, в которой находится разрешающий элемент, получает название разрешающей строки. Первый индекс выбранного разрешающего элемента a_{pq} указывает, что он находится в строке с номером р. Это означает, что строка с этим номером является разрешающей. Та базисная переменная, которая указана на пересечении разрешающей строки и столбца «$X_б$», в результате преобразования таблицы окажется небазисной. Именно вместо нее небазисная переменная x_q войдет в базисный набор.

Преобразование левой части таблицы

В таблице ее левая и правая часть преобразуются по отдельным правилам. В левую часть входят первые три столбца таблицы. В правую часть входят все остальные столбцы (начиная со столбца «В»).

В левой части таблицы содержимое столбца «№» при преобразовании сохраняется. В содержимом столбца «$X_б$» производится замена одной из базисных переменных. Переменная, находящаяся в разрешающей строке, заменяется переменной, соответствующей разрешающему столбцу. В столбце «$C_б$», в полном соответствии с этим элемент, стоящий в разрешающей строке, заменяется элементом, указанным вверху таблицы над переменной разрешающего столбца.

Преобразование правой части таблицы

Правая часть таблицы преобразуется методом Гаусса. Процесс преобразования состоит из нескольких шагов. На каждом шаге преобразуется отдельная строка правой части таблицы. Число шагов равно количеству строк.

Целью преобразования является превращение разрешающего столбца в базисный столбец, то есть в такой, где на месте разрешающего элемента стоит 1, а все остальные элементы равны 0.

Процедура начинается с преобразования разрешающей строки. На первом шаге преобразования разрешающая строка делится на разрешающий элемент. В преобразованной строке на месте разрешающего элемента оказывается 1.

Далее преобразование осуществляется отдельно с каждой строкой. Для этого следует из преобразуемой строки вычесть преобразованную разрешающую строку, умноженную предварительно на подходящее число. Таким подходящим для каждой преобразуемой строки является свое число. Оно находится на пересечении преобразуемой строки и разрешающего столбца. В результате преобразования на месте этого подходящего числа оказывается 0.

Формулы преобразования

Преобразование правой части таблицы можно описать в формульном виде. Отметим элементы преобразованной таблицы штрихом. Напомним, что a_{pq} разрешающий элемент.

Тогда для разрешающей строки

$$a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pq}}, \qquad b'_p = \frac{b_p}{a_{pq}}.$$

Для произвольной i-й строки, кроме разрешающей ($i \neq p$) и критериальной, выполняются равенства

$$a'_{ij} = a_{ij} - a'_{pj} a_{iq}; \qquad b'_i = b_i - b'_p a_{iq}.$$

Для критериальной строки

$$\Delta'_j = \Delta_j - a'_{pj} \Delta_q; \qquad d' = d - b'_p \Delta_q.$$

Легко проверить, что в соответствии с этими формулами элементы разрешающего столбца преобразуются в элементы базисного столбца:

$$a'_{pq} = \frac{a_{pq}}{a_{pq}} = 1; \qquad a'_{iq} = a_{iq} - a'_{pq}\, a_{iq} = 0; \qquad \Delta'_q = \Delta_q - a'_{pq} \Delta_q = 0.$$

Допустимость текущего опорного плана

Допустимый план удовлетворяет всем ограничениям системы. В частности, его компоненты не могут быть отрицательными. Убедимся, что начальный и все последующие текущие опорные планы содержат только неотрицательные компоненты.

В текущем опорном плане небазисные компоненты равны 0, тем самым они неотрицательны. Базисные компоненты равны элементам столбца «В» во всех строках, кроме критериальной. Они тоже должны быть неотрицательными.

Их неотрицательность в первоначальной таблице обеспечивается предварительной подготовкой модели. Их неотрицательность в преобразованной таблице вытекает из формулы преобразования.

Действительно, для разрешающей строки выполняется равенство

$$b'_p = \frac{b_p}{a_{pq}}.$$

По условию $b_p \geq 0$. Поскольку a_{pq} – разрешающий элемент, то $a_{pq} > 0$. Отсюда следует, что $b'_p \geq 0$.

Для остальных строк таблицы

$$b'_i = b_i - b'_p a_{iq}.$$

По условию $b_i \geq 0$. Только что было доказано, что $b'_p \geq 0$. Если $a_{iq} \leq 0$, то из формулы сразу следует, что $b'_i \geq 0$.

Рассмотрим противоположный случай, когда $a_{iq} > 0$. Доказываемое утверждение $b'_i > 0$ равносильно неравенству

$$b'_i - b'_p a_{iq} \geq 0,$$

которое, в свою очередь, равносильно

$$b_i - \frac{b_p}{a_{pq}} a_{iq} \geq 0,$$

то есть

$$b_i \geq \frac{b_p}{a_{pq}} a_{iq}.$$

Поскольку по предположению $a_{iq} > 0$, то можно разделить обе части последнего неравенства на эту величину, сохранив его смысл:

$$\frac{b_i}{a_{iq}} \geq \frac{b_p}{a_{pq}}.$$

Последнее неравенство верно. Его справедливость следует непосредственно из правила выбора разрешающего элемента по наименьшему отношению.

Таким образом, мы доказали, что при преобразовании симплексной таблицы элементы столбца «В» во всех строках, кроме критериальной, остаются неотрицательными (хотя сами их численные значения, конечно, изменяются).

Именно благодаря этому новый текущий план оказывается допустимым. Свойство симплексной таблицы, состоящее в том, что все элементы столбца свободных членов – столбца «В» таблицы неотрицательны (кроме, быть может, критериального), называют свойством ***допустимости*** таблицы.

Мы доказали, что при преобразовании таблицы ее допустимость сохранится.

Заметим, что обычно элементы столбца «B» (кроме, возможно, критериального) не просто неотрицательны, а строго положительны. Случай, когда такой элемент равен 0, возможен, но встречается достаточно редко.

Рост значения целевой функции

Новой симплексной таблице соответствует новый текущий опорный план. Этому плану соответствует новое значение целевой функции. Оно вычисляется по формуле:

$$d' = d - b'_p \Delta_q.$$

Как мы выяснили ранее, $b'_p \geq 0$. Кроме того, по определению разрешающего столбца имеем:

$$\Delta q < 0.$$

Поэтому во всех случаях $d' \geq d$, новое значение целевой функции не меньше предыдущего. Равенство возникает $d' = d$ только при $b'_p = 0$.

Обычно $b'_p > 0$. Случай, когда $b'_p = 0$, встречается крайне редко. Поэтому при переходе к новому опорному плану значение целевой функции всегда не убывает, и в типичной ситуации оно строго возрастает.

Алгоритм симплекс-метода

Блок-схема алгоритма симплекс-метода

Новый текущий опорный план, соответствующий новой симплексной таблице, следует проверить на оптимальность. Если он удовлетворяет критерию оптимальности, то решение задачи окончено. Если нет, то решение задачи следует продолжить. В таблице следует выбрать разрешающий столбец, в нем найти разрешающий элемент, определить разрешающую строку и пересчитать таблицу снова.

Так следует продолжать до тех пор, пока последовательность преобразований таблицы не прервется. Прерваться же она может только в одном их двух случаев.

Во-первых, если очередная таблица окажется удовлетворяющей критерию оптимальности (отсутствует разрешающий столбец). Тогда соответствующий ей текущий опорный план является оптимальным, задача решена.

Во-вторых, если очередная таблица окажется удовлетворяющей критерию неограниченности целевой функции (в разрешающем столбце отсутствует разрешающий элемент). Тогда задача не имеет решения. Процесс решения задачи на этом заканчивается.

Последовательность преобразований таблиц и сопровождающих их рассуждений образует алгоритм симплекс-метода. Он может быть представлен в виде блок-схемы (рис. 1.10).

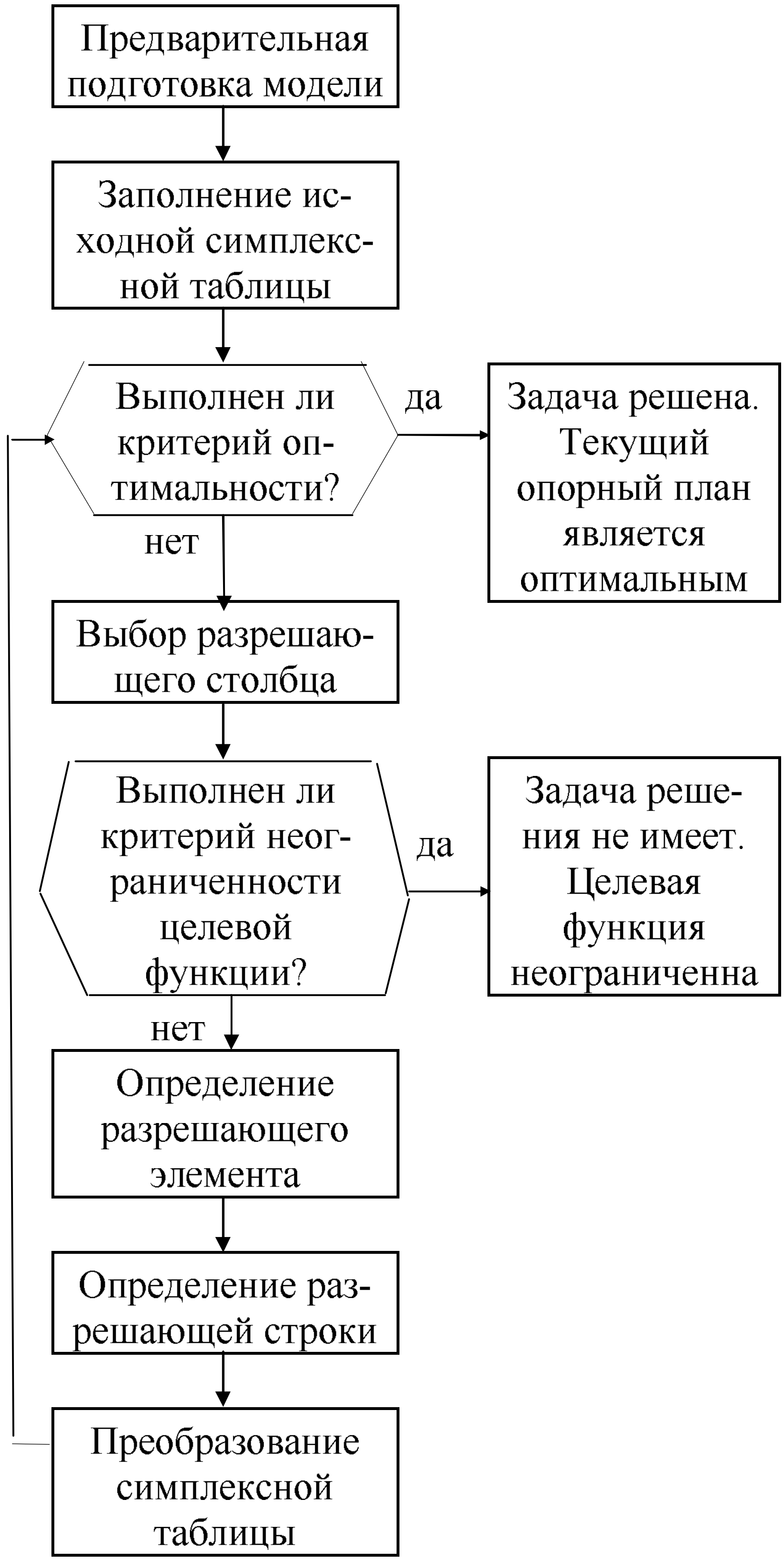


Рис. 1.10. Блок-схема алгоритма симплекс-метода

Рассуждения, участвующие в реализации этого алгоритма, носят чисто формальный характер, сводятся к проверке определенных неравенств и расчетам по известным формулам. Такой алгоритм без труда может быть запрограммирован. Это является большим преимуществом симплекс-метода, поскольку реальные экономические задачи требуют преобразования таблиц большой размерности, практически не поддающихся ручной обработке. В настоящее время разработаны разнообразные компьютерные программы, позволяющие использовать современную вычислительную технику при решении и анализе задач линейного программирования. Одна из таких удобных программ сформирована в виде процедуры «Поиск решения» в Excel.

Сходимость алгоритма симплекс-метода

В блок-схеме алгоритма симплекс-метода имеется цикл. Каждое прохождение по циклу соответствует переходу от одной симплексной таблицы к другой, от одного текущего опорного плана к следующему.

В схеме указаны четкие критерии выхода из цикла, критерии конца процесса решения задачи. Однако всегда ли произойдет такой выход? Не окажется ли, что в процессе решения задачи так и придется пересчитывать симплексные таблицы до бесконечности?

Теорема о сходимости симплекс-метода утверждает, что можно этого не опасаться. Через конечное число прохождения цикла процесс решения задачи прекратится.

Обоснование сходимости основано на следующем рассуждении. Каждой симплексной таблице соответствует свой базисный набор переменных. В задаче участвует конечное число (n) переменных. В базисном наборе участвует конечное число (m) этих же переменных. Следовательно, количество всевозможных базисных наборов конечно.

Каждой симплексной таблице с ее базисным набором соответствует свой текущий опорный план. Таким образом, число текущих опорных планов конечно.

При прохождении по циклу блок-схемы осуществляется переход от одного текущего опорного плана к другому. Каждому плану соответствует свое значение целевой функции.

Как мы убедились, это значение при переходе от одного плана к другому сохраняется или возрастает. Обычно же оно растет.

Если оно возрастает, то текущие опорные планы не могут повторяться. Каждый раз при преобразовании таблицы будет возникать новый план, не встречавшийся ранее.

Поскольку количество таких планов конечно, то процесс решения задачи рано или поздно прекратится. Прекратиться же он может лишь в одном из двух случаев, указанных в блок-схеме.

Если же значение целевой функции сохраняется, то в принципе оказывается возможным повторение текущих опорных планов и зацикливание процесса решения задачи. Однако разработан и обоснован специальный прием, позволяющий обнаруживать такое зацикливание и выходить из него. Таким образом, и в этом случае обеспечивается то, что процесс решения задачи прекращается через конечное число прохождений цикла, конечное число преобразований симплексных таблиц.

Теоретически сходимость алгоритма с помощью специального приема выхода из цикла обеспечена безусловно. В практике программирования этим специальным приемом обычно не пользуются, поскольку он загромождает алгоритм, а практический эффект от него весьма мал. Натолкнуться на задачу с зацикливанием практически невероятно.

Метод искусственного базиса

Симплекс-метод можно непосредственно применять в тех ситуациях, когда исходная модель после приведения к канонической форме и установления неотрицательных значений правых частей ограничений обладает базисным набором переменных. Если такой набор отсутствует, то в модель вводят так называемые искусственные базисные переменные и используют один из методов искусственного базиса. Наиболее распространенным среди них является М-метод.

Пусть дана задача линейного программирования в канонической форме:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \quad \dots \quad c_nx_n)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \dots \quad x_n \ge 0. \end{cases}$$

Предположим, что все правые части ограничений неотрицательны:

$$b_i \ge 0.$$

Пусть в записи модели отсутствует базисный набор переменных. Наряду с данной задачей рассмотрим новую задачу.

$$\max\,(c_1x_1 + c_2x_2 + \;\ldots\; c_nx_n - Mu_1 - \ldots \; -Mu_m)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + u_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + u_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + u_m = b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \;\ldots\; x_n \ge 0, \quad u_1 \ge 0, \;\ldots\; u_m \ge 0. \end{cases}$$

Новая задача носит название вспомогательной, или М-задачи. В ней под буквой М подразумевается некоторая очень большая величина (строго говоря, $M \to +\infty$).

Вспомогательная задача обладает базисным набором переменных. Такой набор образуют новые переменные $u_1, u_2, \ldots\, u_m$, отсутствовавшие в исходной задаче. Они называются искусственными переменными.

Эту задачу можно решать симплекс-методом. Как мы знаем, процесс решения заканчивается одной из двух ситуаций: или целевая функция задачи неограниченна, или в результате решения возникает оптимальный план.

Если целевая функция вспомогательной задачи оказывается неограниченной, то она не имеет решения. В этом случае не имеет решения и исходная задача.

Рассмотрим вторую ситуацию. Пусть вспомогательная задача имеет оптимальный план. В него входят значения всех переменных

$$(x_1,\; x_2,\; \ldots\; x_n,\; u_1,\; u_2,\; \ldots\; u_m).$$

Если среди искусственных переменных имеется хотя бы одна не равная 0, то исходная задача не имеет решения. Если же значения всех искусственных переменных равны 0, то их следует устранить из оптимального плана вспомогательной задачи. Оставшаяся часть плана, содержащая только значения исходных переменных, то есть

$$(x_1,\; x_2,\; \ldots\; x_n),$$

образует в этом случае оптимальный план исходной задачи.

Универсальность симплекс-метода

Симплекс-метод позволяет решить любую задачу линейного программирования (если она имеет решение) или определить ее неразрешимость (если она не имеет решения).

Действительно, любую задачу линейного программирования можно привести к канонической форме. Свободные члены ограничений задачи всегда можно сделать неотрицательными (путем умножения обеих частей ограничения на - 1).

Если запись задачи обладает базисным набором, то к ней непосредственно можно применять симплекс-метод, который через конечное число шагов позволяет решить задачу или установить ее неразрешимость.

Если запись задачи не обладает базисным набором, то следует построить вспомогательную задачу с искусственным базисным набором. Для решения вспомогательной задачи можно непосредственно применить симплекс-метод. Анализируя результаты решения вспомогательной задачи, получают решение исходной или устанавливают ее неразрешимость.

Процедура *Поиск решения*

Существуют компьютерные реализации алгоритмов решения задач линейного программирования. Мы рассмотрим здесь одну из них, входящую в электронные таблицы Excel. Эта процедура называется *Поиск решения.*

Рассмотрим применение данной процедуры в связи с нашим примером составления плана по производству двух продуктов – *Печенья* и *Бисквитов.*

Для решения задачи сначала подготовим исходные данные. На рис. 1.11 дан один из возможных вариантов представления данных на листе Excel.

Указание. Для корректного применения процедуры Поиск решения и проведения дальнейшего постоптимизационного анализа на листе Excel нежелательно присутствие объединенных ячеек. Если объединенные ячейки есть, то следует снять объединение. При желании восстановить после этого расположение заголовка объединение ячеек можно заменить, выбрав формат «выравнивание горизонтали» *по центру выделения.*

В ячейку первой строки введено название задачи. В ячейки столбца A введены наименования строк таблицы. В ячейки второй строки введены названия столбцов таблицы.

В столбцах B и C (*Печенье* и *Бисквиты*) содержатся необходимые данные по этим двум продуктам. Ячейки B3 и C3 – это компоненты будущего оптимального плана (в математической модели это переменные x_1 и x_2). Пока они пустые. В столбцах приведены данные на единицу продукции. В ячейках B4 и C4 содержатся отпускные цены продуктов. Далее приведены данные по затратам ресурсов на единицу выпуска продукции.

Единицы и нули (пустые ячейки) в диапазоне B12:C13 задают коэффициенты в ограничениях по спросу.

В столбце E «Доступно» указаны доступные объемы ресурсов и объем спроса. В столбце D «Необходимо» введены формулы, позволяющие вычислить выручку и затраты ресурсов при реализации данного производственного плана, а также покрытый спрос. Формульное содержание таблицы дано на рис. 1.12. Формулы столбца D в точности соответствуют выражениям в целевой функции и левых частях ограничений математической модели.

	A	B	C	D	E	F
1	**1-й период (до решения)**					
2		**Печенье**	**Бисквиты**	Необходимо	Доступно	Остаток
3	План					
4	***Выручка***	***32***	***27***	***0***		
5	Мука	0,5	0,3	0	825	825
6	Масло	0,3	0,06	0	480	480
7	Яйцо	0,18	0,6	0	720	720
8	Сахар	0,2	0,3	0	450	450
9	Труд	0,07	0,09	0	200	200
10	Оборуд. по тесту	0,015	0,006	0	40	40
11	Оборуд. по выпечке	0,0075	0,015	0	40	40
12	Спрос на печенье	1		0	3000	3000
13	Спрос на бисквиты		1	0	3000	3000

Рис. 1.11. Вид исходных данных для процедуры *Поиск решения*

Присутствующие в столбце D знаки $ не обязательны, но позволяют упростить процесс ввода: достаточно ввести формулу в одну из ячеек столбца «Необходимо» и затем протянуть ее по всему столбцу.

Сначала затраты ресурсов и выручка автоматически оказываются равными 0. Это соответствует отсутствию производства продукции.

В ячейках столбца F «Остаток» ведены формулы, вычисляющие разность между доступным и необходимым объемом ресурса. В начальной ситуации «Остаток» совпадает с «Доступно».

	A	B	C	D	E	F
1	**1-й период (до решения)**					
2		**Печенье**	**Бисквиты**	Необходимо	Доступно	Остаток
3	План					
4	***Выручка***	*32*	*27*	***=B4*B$3+C4*C$3***		
5	Мука	0,5	0,3	=B5*B$3+C5*C$3	825	=E5-D5
6	Масло	0,3	0,06	=B6*B$3+C6*C$3	480	=E6-D6
7	Яйцо	0,18	0,6	=B7*B$3+C7*C$3	720	=E7-D7
8	Сахар	0,2	0,3	=B8*B$3+C8*C$3	450	=E8-D8
9	Труд	0,07	0,09	=B9*B$3+C9*C$3	200	=E9-D9
10	Оборуд. по тесту	0,015	0,006	=B10*B$3+C10*C$3	40	=E10-D10
11	Оборуд. по выпечке	0,0075	0,015	=B11*B$3+C11*C$3	40	=E11-D11
12	Спрос на печенье	1		=B12*B$3+C12*C$3	3000	=E12-D12
13	Спрос на бисквиты		1	=B13*B$3+C13*C$3	3000	=E13-D13

Рис. 1.12. Формулы расчета исходных данных для процедуры *Поиск решения*

Такой таблицей можно пользоваться достаточно эффективно и без процедуры *Поиск решения*. Достаточно в ячейки Плана B3 и C3 ввести какие-нибудь данные, чтобы сразу получить результат расчета выручки, необходимых затрат ресурсов и их остатков. Если остаток хотя бы по одному из ресурсов получился отрицательным («Необходимо» оказалось больше, чем «Доступно»), то план является недопустимым. Можно перебирать различные варианты допустимых планов, пока мы не получим план с удовлетворительной величиной выручки. Здесь удобно использовать условное форматирование.

Процедура *Поиск решения* позволяет автоматизировать такой перебор и сделать его направленным. Прежде чем обратиться к процедуре, полезно выделить ячейку D4.

Для вызова процедуры следует в меню войти в *Сервис* и там кликнуть мышью *Поиск решения*. Если в *Сервисе* отсутствует *Поиск решения*, то необходимо войти в *Надстройки* и там пометить *Поиск решения*. После выхода из *Надстроек* в меню *Сервис* появится *Поиск решения*.

Если же и в *Надстройках* нет *Поиска решения*, то следует переустановить Excel, пометив *Поиск решения* при выборе компонентов установки.

При входе в *Поиск решения* на экране появляется диалоговое окно (рис. 1.13).

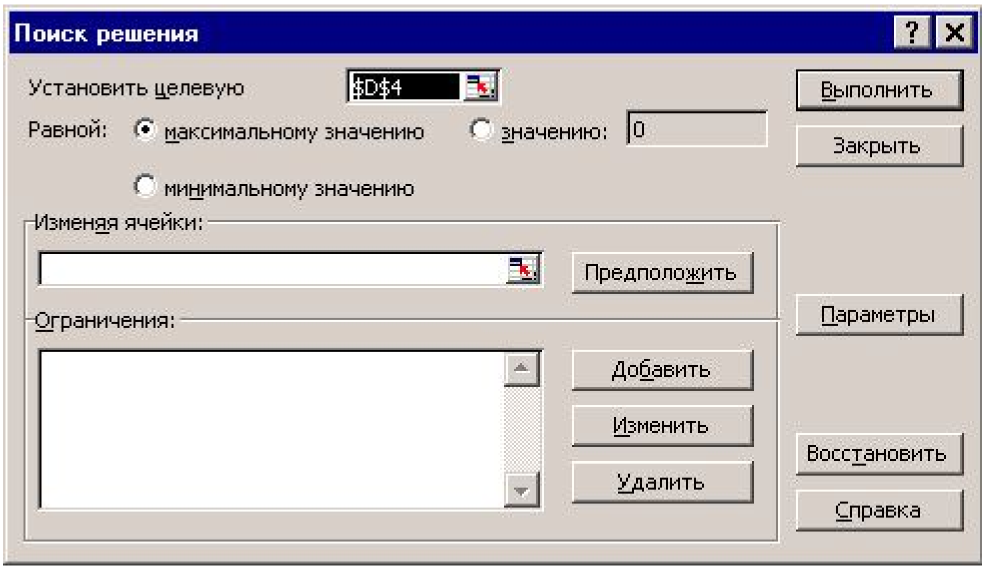


Рис. 1.13. Диалоговое окно *Поиск решения* до ввода данных

Верхнее поле *Установить целевую* первоначально является активным (если нет, его следует активизировать). В нем должен быть указан адрес целевой ячейки (в нашей задаче это $D$4).

Мы хотим максимизировать выручку, поэтому переключатель *Равной* должен быть в положении *максимальному значению*. Если бы в другой задаче потребовалось найти решение для заранее заданного значения целевой ячейки, то переключатель следовало бы установить в положение *значению*, и в открывшемся поле указать требуемое число.

Далее следует щелкнуть в поле *Изменяя ячейки* (или свернуть окно) и выделить мышью диапазон с ячейками $B$3:$C$3, содержащими компоненты искомого плана. Если в другой задаче ячейки плана оказываются разделенными (несмежными), то их следует вводить при нажатой клавише Ctrl. В поле *Изменяя ячейки* адреса несмежных ячеек должны быть разделены точкой с запятой.

Для ввода данных в окно *Ограничения* следует нажать кнопку *Добавить*. На экране возникнет новое диалоговое окно *Добавление ограничения*, предназначенное для ввода ограничений (рис. 1.14).

В поле *Ссылка на ячейку* можно вводить адреса отдельных ячеек или же целого диапазона. В нашем случае выделим мышью диапазон $D$5:$D$13.

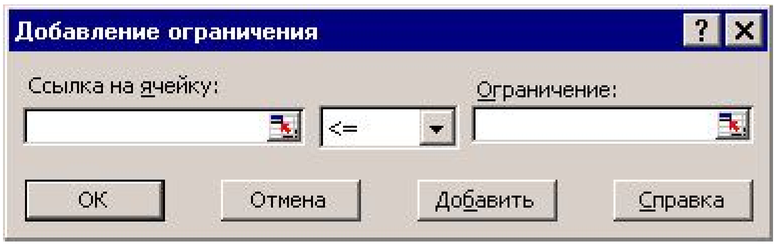


Рис. 1.14. Диалоговое окно *Добавление ограничения* до ввода данных

В среднем поле выберем из списка вид ограничения. В нашем случае это <= (этот знак стоит по умолчанию). В других задачах, возможно, потребуются другие виды ограничений. В частности, вид ограничения «цел» означает, что содержимое ячеек в левом поле должно быть целочисленным, а «двоич» означает, что допустимыми числовыми значениями данных ячеек являются только 1 и 0 (Да и Нет).

В поле *Ограничение* можно вводить адреса отдельных ячеек, целого диапазона или же число. В нашем случае выделим мышью диапазон \$E\$5:\$E\$13 (рис. 2.15). Это означает, что содержимое каждой ячейки диапазона \$D\$5:\$D\$13 не превосходит содержимого соответствующей ячейки диапазона \$E\$5:\$E\$13.

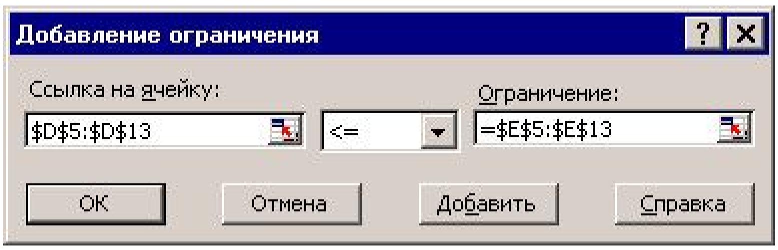


Рис. 1.15. Диалоговое окно *Добавление ограничения* после ввода данных

Далее можно нажать кнопку ОК. Если бы потребовались дополнительные ограничения, то следовало бы нажать кнопку *Добавить* и продолжить ввод ограничений.

В появившемся диалоговом окне *Поиск решения* можно увидеть результаты проведенных действий (рис. 1.16).

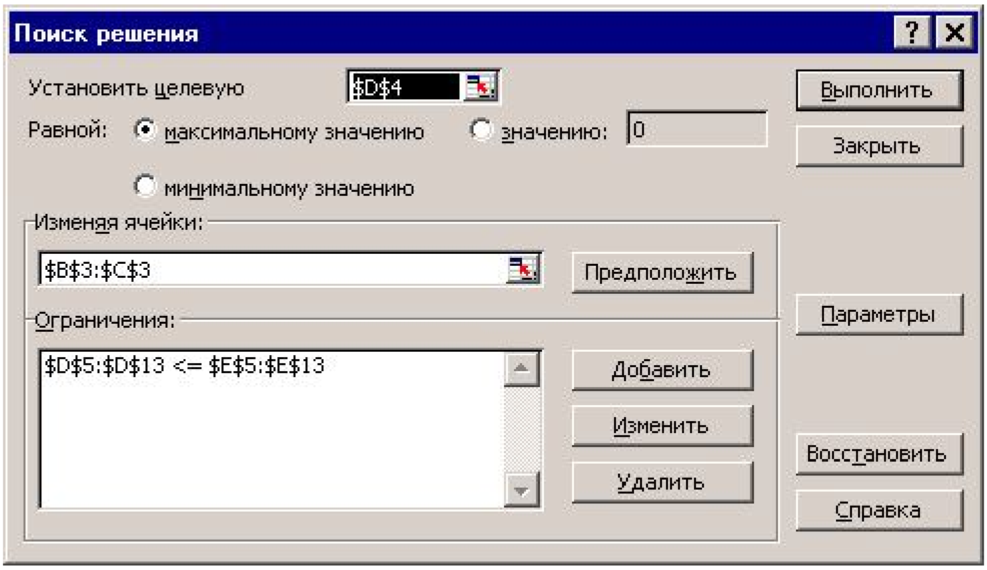


Рис. 1.16. Диалоговое окно Поиск решения после ввода данных

Теперь следует нажать кнопку *Параметры* и в новом окне (рис. 1.17) поставить два флажка.

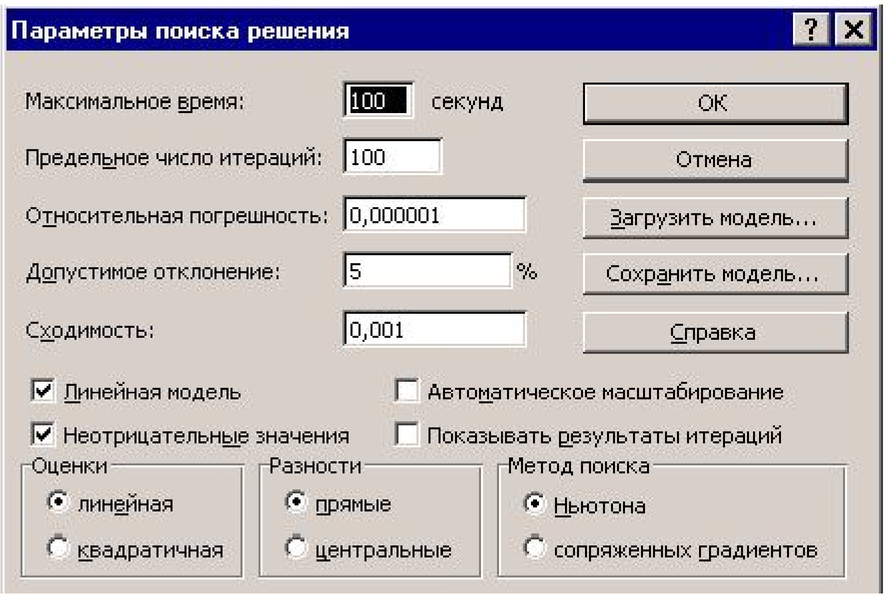


Рис. 1.17. Параметры поиска решения

Флажок *Неотрицательные значения* соответствует неотрицательности компонентов плана, то есть объемов производства *Печенья* и *Бисквитов*. Флажок *Линейная модель* (наша модель не содержит нелинейных функций) ускорит процесс вычислений и позволит вывести *Отчеты* для более подробного постоптимизационного анализа.

Теперь можно нажать кнопку ОК и в вернувшемся окне (рис. 1.16) нажать кнопку *Выполнить*.

В окне *Результаты поиска решения* (рис. 1.18) можно прочесть итоговое сообщение.

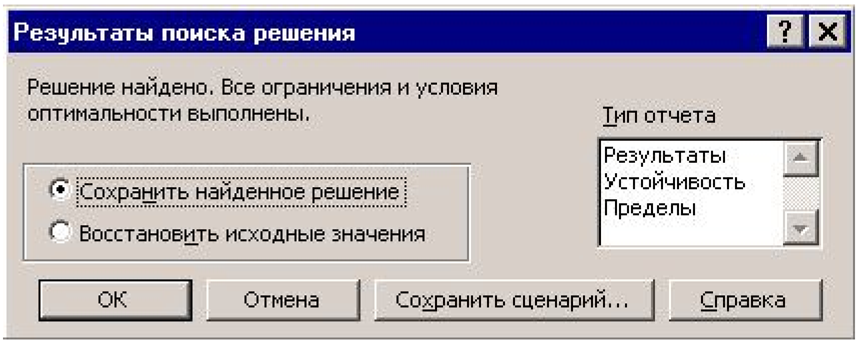


Рис. 1.18. Диалоговое окно Результаты поиска решения

Далее можно сразу нажать кнопку ОК и зафиксировать на листе Excel результаты оптимизации или же дополнительно к этому вывести Отчеты для постоптимизационного анализа. Для получения Отчетов необходимо пометить мышью в поле *Тип отчета* их требуемые типы.

Пометим в окне *Тип отчета* все три типа: *Результат*, *Устойчивость* и *Пределы*, и после этого нажмем кнопку ОК.

На листе Excel, содержащем модель, появляются результаты расчетов (рис. 1.19).

	A	B	C	D	E	F
1	**1-й период (после решения)**					
2		**Печенье**	**Бисквиты**	Необходимо	Доступно	Остаток
3	План	**1250**	**667**			
4	***Выручка***	***32***	***27***	***58000***		
5	Мука	0,5	0,3	825	825	0
6	Масло	0,3	0,06	415	480	65
7	Яйцо	0,18	0,6	625	720	95
8	Сахар	0,2	0,3	450	450	0
9	Труд	0,07	0,09	148	200	53
10	Оборуд. по тесту	0,015	0,006	23	40	17
11	Оборуд. по выпечке	0,0075	0,015	19	40	21
12	Спрос на печенье	1		1250	3000	1750
13	Спрос на бисквиты		1	667	3000	2333

Рис. 1.19. Результаты расчета оптимального плана

Часть результатов уже знакома нам по графическому решению. Оптимальный план предписывает изготовить 1250 кг *Печенья* и 666,667 кг *Бисквитов*. Выручка при этом будет равна 58000 руб. В столбце «Необходимо» появляется новая информация о затратах ресурсов, необходимых для реализации плана. В столбце «Остатки» появляется дополнительная информация о неиспользованных объемах ресурсов.

Листы с Отчетами автоматически вставляются в книгу с соответствующими ярлычками. *Отчет по результатам* (рис. 1.20) состоит из трех блоков данных. Первые два, «Целевая ячейка (Максимум)» и «Изменяемые ячейки», содержат данные по исходному и результирующему состоянию этих ячеек. Третий блок, «Ограничения», содержит информацию по ячейкам и формулам ограничений модели. Здесь же указывается статус ограничения (связанное или не связанное) и разница, соответствующая в нашей модели неиспользованному остатку ресурса.

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$4	Выручка Необходимо	0	58000

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	План Печенье	0	1250
$C$3	План Бисквиты	0	667

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$D$5	Мука Необходимо	825	$D$5<=$E$5	связанное	0
$D$6	Масло Необходимо	415	$D$6<=$E$6	не связан.	65
$D$7	Яйцо Необходимо	625	$D$7<=$E$7	не связан.	95
$D$8	Сахар Необходимо	450	$D$8<=$E$8	связанное	0
$D$9	Труд Необходимо	148	$D$9<=$E$9	не связан.	52,5
$D$10	Оборуд. по тесту Необходимо	23	$D$10<=$E$10	не связан.	17,25
$D$11	Оборуд. по выпечке Необходимо	19	$D$11<=$E$11	не связан.	20,625
$D$12	Спрос на печенье Необходимо	1250	$D$12<=$E$12	не связан.	1750
$D$13	Спрос на бисквиты Необходимо	667	$D$13<=$E$13	не связан.	2333,333333

Рис. 1.20. Отчет по результатам

В *Отчете по устойчивости* (рис. 1.21) представлены два блока: «Изменяемые ячейки» и «Ограничения». Первый блок содержит информацию по допустимому увеличению и уменьшению коэффициентов целевой функции. Столбец Нормир. стоимость дает полезную информацию, когда хотя бы один компонент плана равен 0 (производство того или иного продукта не выгодно). В этой ситуации Нормир. стоимость показывает потери величины целевой функции, приходящиеся на каждую единицу производства такого невыгодного продукта.

Во втором блоке представлены данные по теневой цене ресурсов и по допустимому увеличению и уменьшению объемов ресурсов. Теневая цена не связанных ресурсов равна 0, и в нашей модели допустимое увеличение таких избыточных ресурсов неограниченно. В компьютерной реализации бесконечность символизируется астрономическим числом 1E+30 (10 в 30-й степени).

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	План Печенье	1250	0	32	13	14
$C$3	План Бисквиты	667	0	27	21	7,8

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$5	Мука Необходимо	825	47	825	75	129,5454545
$D$6	Масло Необходимо	415	0	480	1E+30	65
$D$7	Яйцо Необходимо	625	0	720	1E+30	95
$D$8	Сахар Необходимо	450	43	450	34,75609756	97,5
$D$9	Труд Необходимо	148	0	200	1E+30	52,5
$D$10	Оборуд. по тесту Необходимо	23	0	40	1E+30	17,25
$D$11	Оборуд. по выпечке Необходимо	19	0	40	1E+30	20,625
$D$12	Спрос на печенье Необходимо	1250	0	3000	1E+30	1750
$D$13	Спрос на бисквиты Необходимо	667	0	3000	1E+30	2333,333333

Рис. 1.21. Отчет по устойчивости

В *Отчете по пределам* (рис. 1.22) два блока: «Изменяемое» и «Целевое». Здесь новая информация содержится в ячейках столбца «Целевое Результат». Числа в этих ячейках показывают, чему была бы равна выручка при отсутствии одного из продуктов.

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$D$4	Выручка Необходимо	58000

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$3	План Печенье	1250	0	18000	1250	58000
$C$3	План Бисквиты	667	0	40000	667	58000

Рис. 1.22. Отчет по пределам

В следующих заданиях развиваются условия конкретной ситуации с производством *Печенья* и *Бисквитов*.

Задание 1.4. Модификации компьютерного решения

I. Предположим, что к имеющемуся запасу сахара можно докупить его дополнительно по цене 14 руб. за кг. Сколько сахара выгодно докупить и какова ожидаемая величина выгоды?

II. Предположим, что ситуация изменилась, и из 825 кг муки 200 кг оказались не пригодными к употреблению.
1. Изобразите новую область допустимых планов.
2. Рассчитайте новый оптимальный план и оптимум.
3. Определите связанные ресурсы, их теневые цены и допустимые границы изменения.
4. Определите допустимые границы изменения цен.

III. Предположим, что часть работников не выйдет на работу и за плановый период будет доступно не 200, а всего 130 часов рабочего времени.
1. Изобразите новую область допустимых планов.
2. Рассчитайте новый оптимальный план и оптимум.
3. Выгодно ли привлекать сверхурочные работы по тарифу 60 руб. за час? Если нет, то насколько невыгодно? Если да, то насколько выгодно и в каком объеме?

Анализ динамической ситуации ПАРИС

Анализ результатов первого периода

Предположим, что в фирме «Сфера» принят рассчитанный выше оптимальный план, предусматривающий производство 1250 кг *Печенья* и 666,667 кг *Бисквитов*. Плановая выручка равна 58000 руб. Часть ее расходуется на покрытие произведенных затрат (заработная плата и затраты на хранение сырья), оставшуюся часть следует вложить в поддержку дальнейшей работы фирмы.

Что это означает в нашей ситуации?

Объемы остатков сырья малы, так что далее потребуется закупка сырья всех четырех видов. Следует выделить средства на заказ и доставку по всем видам сырья, а оставшиеся средства распределить на закупку сырья оптимальным образом.

Объемы закупаемого сырья (с учетом имеющихся остатков на складе) должны стать основой нового оптимального производственного плана. Для его расчета требуется знание исходных параметров.

На рис. 1.23 представлена форма определения стоимости сырья для будущего периода времени. Она состоит из трех блоков: *Расчет оптимального плана, Использование сырья, Распределение выручки, затрат и прибыли*.

Верхний блок уже был построен при составлении плана.

Целью второго блока является определение запасов сырья в конце текущего периода, после реализации плана. Тем самым мы выясняем складские запасы, с которыми входим в следующий плановый период.

Нижний блок направлен на расчет стоимости доступного сырья для следующего периода. Полученная величина (в нашем расчете 52919 руб.) является ключевым параметром при планировании производства и его сырьевого обеспечения в следующем периоде.

Расчеты полезно построить так, чтобы их можно было скопировать и использовать с минимальной редакцией в дальнейших плановых периодах. В ячейках должны быть введены формулы, а сами таблицы ориентированы не только на текущий, но и на будущие периоды.

Указание. Постройте расчетные таблицы в Excel по образцу рис. 1.23. Прежде, чем приступить к дальнейшему анализу, подумайте об организации будущих расчетов в Excel. Дальнейшее моделирование предполагает последовательный анализ нескольких периодов времени и оценку вариантов по периодам. Потребуются объемные расчеты. В таких случаях важно уметь удобно расположить расчетные таблицы. Хорошая организация расчетов предполагает, что по возможности все исходные данные находятся в одном месте, на отдельном листе книги Excel. Расчеты по каждому периоду и по вариантам следует проводить на отдельных листах книги Excel. Таблицам по периодам следует придать максимально близкую структуру и оформление. Это позволит при проведении объемных расчетов эффективно использовать копирование.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**1-й период (после решения)**						
2		**Печенье**	**Бисквиты**	Необходимо	Доступно	Остаток	
3	План	**1250**	**667**				
4	***Выручка***	***32***	***27***	***58000***			
5	Мука	0,5	0,3	825	825	0	
6	Масло	0,3	0,06	415	480	65	
7	Яйцо	0,18	0,6	625	720	95	
8	Сахар	0,2	0,3	450	450	0	
9	Труд	0,07	0,09	148	200	53	
10	Оборуд. по тесту	0,015	0,006	23	40	17	
11	Оборуд. по выпечке	0,0075	0,015	19	40	21	
12	Спрос на печенье	1		1250	3000	1750	
13	Спрос на бисквиты		1	667	3000	2333	
14	**Использование сырья**						
15	***Сырье***	*Закупочная цена*	*Запасы в конце предш. периода*	*Поступление сырья*	*Запасы в начале текущ. периода*	*Использованное сырье*	*Запасы в конце текущ. периода*
16	Мука	7,6	825	0	825	825	0
17	Масло	44	480	0	480	415	65
18	Яйцо	16	720	0	720	625	95
19	Сахар	9,2	450	0	450	450	0
20	Стоимость сырья		43050	0	43050	38670	4380
21	**Распределение выручки, затрат и прибыли**						
22	***Расчеты в текущем периоде***			***Сырьевое обеспечение следующего периода***			
23	***Выручка***		58000	ЗАТРАТЫ на создание новых запасов:			
24	ЗАТРАТЫ:			Доставка новых запасов			4000
25	1. Оплата обычной работы		5000	Приобретение новых запасов			48539
26	2. Оплата сверхурочной работы		0	СТОИМОСТЬ сырья, доступного в следующем периоде:			
27	3. Оплата хранения сырья		461	Стоимость переходящих запасов			4380
28	***Итого затраты***		5461	Стоимость новых запасов			48539
29	***Прибыль***		**52539**	***Итого стоимость доступного сырья***			**52919**

Рис. 1.23. Форма расчета стоимости сырья для обеспечения следующего периода

Моделирование второго периода

Математическая модель второго периода подобна модели первого периода. Единственное существенное различие в том, что во втором периоде вместо четырех отдельных ограничений по сырью используется одно единое ограничение по сырьевым затратам.

Это ограничение имеет вид:

$$21{,}72x_1 + 17{,}28x_2 \leq 52919.$$

В этом неравенстве коэффициенты 21,72 и 17,28 представляют собой стоимость сырья, содержащегося в 1 кг готового продукта. Они рассчитываются непосредственно по исходным данным, исходя из технологических коэффициентов (рецептуры продуктов) и закупочных цен сырья. Величина 52919 в правой части неравенства соответствует тому объему прибыли, который по результатам первого периода оставлен на закупку сырья во втором периоде (ячейка G29 *Итого стоимость доступного сырья*).

Расчетная таблица, содержащая модель второго периода после применения *Поиска решения*, дана на рис. 1.24.

Оптимальный план во втором периоде изменился. При его реализации выручка возрастает более чем на 21 тыс. руб., то есть более чем на 35%.

К связанным ограничениям относятся *Стоимость сырья* и *Труд*. Эти ограничения определяют узкие места при реализации плана. Полезно исследовать возможности расшивки этих узких мест, увеличения правых частей этих ограничений.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**2-й период**						
2		**Печенье**	**Бисквиты**	Необходимо	Доступно	Остаток	
3	План	**1753**	**858**				
4	***Выручка***	***32***	***27***	***79288***			
5	Стоимость сырья	21,72	17,28	52919	52919	0	
6	Труд	0,07	0,09	200	200	0	
7	Оборуд. по тесту	0,015	0,006	31	40	9	
8	Оборуд. по выпечке	0,0075	0,015	26	40	14	
9	Спрос на печенье	1		1753	3000	1247	
10	Спрос на бисквиты		1	858	3000	2142	
11	**Использование сырья**						
12	***Сырье***	*Закупочная цена*	*Запасы в конце предш. периода*	*Поступление сырья*	*Запасы в начале текущ. периода*	*Использованное сырье*	*Запасы в конце текущ. периода*
13	Мука	7,6	0	1134	1134	1134	0
14	Масло	44	65	513	578	578	0
15	Яйцо	16	95	736	831	831	0
16	Сахар	9,2	0	608	608	608	0
17	Стоимость сырья		4380	48539	52919	52919	0
18	**Распределение выручки, затрат и прибыли**						
19	***Расчеты в текущем периоде***			***Сырьевое обеспечение следующего периода***			
20	***Выручка***		79288	ЗАТРАТЫ на создание новых запасов:			
21	ЗАТРАТЫ:			Доставка новых запасов			4000
22	1. Оплата обычной работы		5000	Приобретение новых запасов			69737
23	2. Оплата сверхурочной работы		0	СТОИМОСТЬ сырья, доступного в следующем периоде:			
24	3. Оплата хранения сырья		551	Стоимость переходящих запасов			0
25	***Итого затраты***		5551	Стоимость новых запасов			69737
26	***Прибыль***		**73737**	***Итого стоимость доступного сырья***			**69737**

Рис. 1.24. Результаты моделирования во втором периоде

Обратимся для этого к *Отчету по устойчивости* второго периода, где указаны теневые цены ресурсов. Там мы обнаружим, что теневая цена *Труда* равна 44,93, а для *Стоимости сырья* она составляет 1,33.

По *Труду* можно расшить узкое место за счет привлечения сверхурочных работ. Для определения их выгодности следует сравнить теневую цену *Труда* 44,93 с оплатой единицы (одного человеко-часа) сверхурочных работ, составляющей 50 руб. Мы видим, что дополнительные затраты на 5,07 руб. превышают дополнительный доход. Таким образом, использование сверхурочных работ в сложившейся ситуации невыгодно.

Рассмотрим затраты по *Стоимости сырья*. Теневая цена 1,33 означает, что каждый дополнительный рубль, вложенный в закупку сырья, принесет 1,33 рубля дополнительной выручки. Таким образом, на закупку сырья выгодно было бы использовать дополнительные средства. Если речь идет о заемных средствах, то они окупятся при кредитной ставке, меньшей 33% за период. Данная величина теневой цены действительна при увеличении затрат по стоимости сырья в пределах до 6849 руб. Эта информация также имеется в *Отчете*.

Результаты можно проверить и напрямую. Достаточно в таблице увеличить содержимое ячейки E5 на величину 6849, провести новый расчет и посмотреть на новую величину выручки. Она составит 88387 руб., то есть на 9099 руб. больше, чем без использования дополнительных средств. Отношение 9099 / 6849 как раз и равно 1,33.

Однако дальнейшее исследование в этом направлении выводит за рамки нашей задачи, поскольку в данной конкретной ситуации мы не анализируем кредитные возможности предприятия.

Таким образом, улучшить результат за счет расшивки узких мест во втором периоде не получается.

Все сырье, имевшееся во втором периоде, оказывается исчерпанным. Сырьевых запасов в конце периода не остается. В результате работы имеем 69737 руб. на закупку сырья для следующего периода.

<u>Указание.</u> Постройте в Excel расчетную таблицу для применения *Поиска решения* и проведите расчеты по указанному образцу. Выведите *Отчеты* (наиболее важен здесь *Отчет по устойчивости*), проанализируйте теневые цены и допустимые границы.

Задание 1.5. Графики второго периода

Постройте графики и получите графическое решение для второго периода. Определите на графике оптимальный план. Соответствует ли он результатам расчетов на основе *Поиска решения*?

В Excel такие графики удобно строить, выбрав тип диаграммы *Точечная*.

Моделирование третьего периода

Математическая модель третьего периода подобна модели второго периода. Они различаются лишь доступной величиной затрат по *Стоимости сырья*. Величина 69737 в ячейке E5 соответствует тому объему прибыли, который по результатам второго периода оставлен на закупку сырья в третьем периоде (ячейка G29 *Итого стоимость доступного сырья* второго периода). Первоначальные результаты расчетов третьего периода представлены на рис. 1.25.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**3-й период (без сверхурочных работ)**						
2		**Печенье**	**Бисквиты**	Необходимо	Доступно	Остаток	
3	План	**2581**	**215**				
4	***Выручка***	***32***	***27***	***88387***			
5	Стоимость сырья	21,72	17,28	59768	69737	9969	
6	Труд	0,07	0,09	200	200	0	
7	Оборуд. по тесту	0,015	0,006	40	40	0	
8	Оборуд. по выпечке	0,0075	0,015	23	40	17	
9	Спрос на печенье	1		2581	3000	419	
10	Спрос на бисквиты		1	215	3000	2785	
11	**Использование сырья**						
12	***Сырье***	*Закупочная цена*	*Запасы в конце предш. периода*	*Поступление сырья*	*Запасы в начале текущ. периода*	*Использованное сырье*	*Запасы в конце текущ. периода*
13	Мука	7,6	0	1355	1355	1355	0
14	Масло	44	0	787	787	787	0
15	Яйцо	16	0	594	594	594	0
16	Сахар	9,2	0	581	581	581	0
17	Стоимость сырья		0	59768	59768	59768	0
18	**Распределение выручки, затрат и прибыли**						
19	***Расчеты в текущем периоде***			***Сырьевое обеспечение следующего периода***			
20	***Выручка***		88387	ЗАТРАТЫ на создание новых запасов:			
21	ЗАТРАТЫ:			Доставка новых запасов			4000
22	1. Оплата обычной работы		5000	Приобретение новых запасов			78807
23	2. Оплата сверхурочной работы		0	СТОИМОСТЬ сырья, доступного в следующем периоде:			
24	3. Оплата хранения сырья		580	Стоимость переходящих запасов			0
25	***Итого затраты***		5580	Стоимость новых запасов			78807
26	***Прибыль***		**82807**	***Итого стоимость доступного сырья***			**78807**

Рис. 1.25. Первоначальные результаты моделирования
в третьем периоде

Производственный план существенно изменился. Выручка возросла до 88387 руб., то есть более чем на 11%. Узкие места (связанные ограничения) – *Труд* и *Оборудование по тесту*.

Вопросами замены оборудования мы в данной ситуации не занимаемся. Эта задача связана с долгосрочными решениями. Но для справки можно сказать, что теневая цена здесь составляет 1065 руб. при увеличении работы в пределах до 3 часов.

По *Труду* имеется возможность привлечения сверхурочных работ. Теневая цена *Труда* в соответствии с *Отчетом по устойчивости* равна

229 руб. Оплата сверхурочного часа составляет 50 руб. Таким образом, сверхурочные работы выгодны. Каждый час дает 179 руб. дополнительного дохода. Это верно для сверхурочных в пределах до 72 часов. Информация по допустимому увеличению имеется в *Отчете*.

Увеличим правую часть ограничения по труду, введя в ячейке E6 величину 272. Проведем новый расчет. Результат представлен на рис. 1.26.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**3-й период (со сверхурочными работами)**						
2		**Печенье**	**Бисквиты**	Необходимо	Доступно	Остаток	
3	План	**2115**	**1377**				
4	***Выручка***	***32***	***27***	***104866***			
5	Стоимость сырья	21,72	17,28	69737	69737	0	
6	Труд	0,07	0,09	272	272	0	
7	Оборуд. по тесту	0,015	0,006	40	40	0	
8	Оборуд. по выпечке	0,0075	0,015	37	40	3	
9	Спрос на печенье	1		2115	3000	885	
10	Спрос на бисквиты		1	1377	3000	1623	
11	**Использование сырья**						
12	***Сырье***	*Закупочная цена*	*Запасы в конце предш. периода*	*Поступление сырья*	*Запасы в начале текущ. периода*	*Использованное сырье*	*Запасы в конце текущ. периода*
13	Мука	7,6	0	1471	1471	1471	0
14	Масло	44	0	717	717	717	0
15	Яйцо	16	0	1207	1207	1207	0
16	Сахар	9,2	0	836	836	836	0
17	Стоимость сырья		0	69737	69737	69737	0
18	**Распределение выручки, затрат и прибыли**						
19	***Расчеты в текущем периоде***			***Сырьевое обеспечение следующего периода***			
20	***Выручка***		104866	ЗАТРАТЫ на создание новых запасов:			
21	ЗАТРАТЫ:			Доставка новых запасов			4000
22	1. Оплата обычной работы		5000	Приобретение новых запасов			91526
23	2. Оплата сверхурочной работы		3600	СТОИМОСТЬ сырья, доступного в следующем периоде:			
24	3. Оплата хранения сырья		740	Стоимость переходящих запасов			0
25	***Итого затраты***		9340	Стоимость новых запасов			91526
26	***Прибыль***		**95526**	***Итого стоимость доступного сырья***			**91526**

Рис. 1.26. Конечные результаты моделирования в третьем периоде

Мы видим, что изменился производственный план, главным образом за счет увеличения выпуска бисквитов. Выручка выросла еще на 16479 руб. Правда, возросли и затраты, так что итог (ячейка C26 или G26) увеличился лишь на 12719 руб.

Теневая цена *Труда* в новых условиях становится равной 45 руб., так что дальнейшее использование сверхурочных работ невыгодно.

Узким местом становится оборудование по подготовке теста. Час дополнительной работы этого оборудования, в соответствии с его теневой ценой, принесет 1065 руб. дополнительного дохода. Есть смысл подумать о расширении производственных мощностей. Однако непосредственно в рамки задачи оптимизации производственного плана эти вопросы не входят.

Моделирование третьего периода завершено. Отметим еще одно различие между результатами двух вариантов расчетов по третьему периоду.

Рассмотрим сначала вариант без сверхурочных работ. В этом варианте затраты по *Стоимости сырья* не являются связанным ограничением. По затратам имеются остатки, равные 9969 руб. Мы не в состоянии освоить все выделенные средства. При этом новые средства, выделенные на закупку сырья в следующем периоде (78807 руб.), оказываются большими, чем в текущем (69737 руб.). Это означает, что далее мы опять не освоим все выделенные средства. План следующего периода сохранится прежним. Так будет продолжаться и далее. При отсутствии сверхурочных работ предприятие выходит на стабильный режим работы.

В варианте со сверхурочными работами все средства по стоимости сырья оказываются освоенными. Стабильный режим еще не наступил.

Указание. Проведите расчеты и анализ на основе Отчетов по третьему периоду.

Задание 1.6. Графики третьего периода

Постройте графики для третьего периода. Определите графически оптимальный план. Соответствует ли он результатам расчетов на основе *Поиска решения*?

Моделирование четвертого и последующих периодов

Модели четвертого и последующих периодов подобны предыдущим. В каждом периоде изменяющиеся характеристики – это затраты на закупку сырья и объем используемых сверхурочных работ. Они влекут изменение производственного плана, выручки и, тем самым, возможности закупки сырья в следующем периоде.

Анализ теневых цен *Труда* в четвертом периоде показывает, что выгодно использовать 90 часов сверхурочных работ из максимально возможных 100. Большему использованию сверхурочных мешают ограничения по оборудованию. Результаты расчетов показаны на рис. 1.27.

Часть средств, выделенных на приобретение сырья, остается неиспользованной. Это означает, что производственные планы последующих периодов совпадут с планом четвертого периода. Производство вышло на стабильный режим работы.

Проведенные расчеты показывают основные направления анализа дальнейшего развития деятельности предприятия.

Во-первых, кое-что можно попытаться извлечь из стабилизации работы. Используемый объем сверхурочных работ подсказывает, что становится выгодным расширить состав постоянных работников.

Далее. Появляется возможность оптимизировать поставки сырья. До сих пор предприятие заказывало сырье на каждый период отдельно. Теперь можно подумать о том, не окажется ли выгоднее обеспечивать сырьем сразу несколько периодов. Такая оптимизация относится к задачам управления запасами. Соответствующие методы будут рассмотрены в следующем разделе пособия. Мы увидим, что по разным видам сырья оптимальный цикл поставок окажется разным.

Во-вторых, данные на рис. 1.27 показывают, что дальнейшее развитие производственного процесса сдерживает использование оборудования. Теневые цены по оборудованию, равные 1542 и 1183 руб., показывают эффект от дополнительного часа использования оборудования двух видов. Следует проанализировать возможность и выгодность расширения мощностей. Эта задача связана с оценкой эффективности производственных инвестиций.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**4-й период (со сверхурочными работами)**						
2		**Печенье**	**Бисквиты**	Необходимо	Доступно	Остаток	
3	План	**2000**	**1667**				
4	***Выручка***	***32***	***27***	***109000***			
5	Стоимость сырья	21,72	17,28	72240	91523	19283	
6	Труд	0,07	0,09	290	300	10	
7	Оборуд. по тесту	0,015	0,006	40	40	0	
8	Оборуд. по выпечке	0,0075	0,015	40	40	0	
9	Спрос на печенье	1		2000	3000	1000	
10	Спрос на бисквиты		1	1667	3000	1333	
11	**Использование сырья**						
12	***Сырье***	*Закупочная цена*	*Запасы в конце предш. периода*	*Поступление сырья*	*Запасы в начале текущ. периода*	*Использованное сырье*	*Запасы в конце текущ. периода*
13	Мука	7,6	0	1500	1500	1500	0
14	Масло	44	0	700	700	700	0
15	Яйцо	16	0	1360	1360	1360	0
16	Сахар	9,2	0	900	900	900	0
17	Стоимость сырья		0	72240	72240	72240	0
18	**Распределение выручки, затрат и прибыли**						
19	***Расчеты в текущем периоде***			***Сырьевое обеспечение следующего периода***			
20	***Выручка***		109000	ЗАТРАТЫ на создание новых запасов:			
21	ЗАТРАТЫ:			Доставка новых запасов			4000
22	1. Оплата обычной работы		5000	Приобретение новых запасов			94720
23	2. Оплата сверхурочной работы		4500	СТОИМОСТЬ сырья, доступного в следующем периоде:			
24	3. Оплата хранения сырья		781	Стоимость переходящих запасов			0
25	***Итого затраты***		10281	Стоимость новых запасов			94720
26	***Прибыль***		**98720**	***Итого стоимость доступного сырья***			**94720**

Рис. 1.27. Результаты моделирования в четвертом периоде

В-третьих, дальнейшее развитие производственного процесса рано или поздно упрется в ограниченность спроса. Потребуются инвестиции в расширение спроса. Здесь полезной окажется информация о теневых ценах существующих границ спроса.

Наконец, важным направлением является расширение ассортимента выпуска продукции. Анализ эффективности решений в этом направлении, возможно, потребует создания бизнес-плана.

Указание. Проведите расчеты и анализ на основе Отчетов по четвертому периоду.

Задание 1.7. Графики четвертого периода

Постройте графики и получите графическое решение для четвертого периода. Определите графически оптимальный план. Соответствует ли он результатам расчетов на основе *Поиска решения*?

Модель транспортной задачи

Многие виды транспортных моделей относятся к классу задач линейного программирования. Рассмотрим пример.

Пример транспортной задачи

Имеется два пункта производства продукции: «Северный» и «Южный». Эти пункты способны производить ежемесячно 1,5 тыс. тонн и 2 тыс. тонн продукции, соответственно.

Имеется три пункта потребления этой продукции: «Горный», «Озерный» и «Лесной». Ежемесячные потребности этих пунктов в продукции составляют соответственно 0,8 тыс. тонн, 1,6 тыс. тонн и 1 тыс. тонн. Стоимость транспортирования 1 тонны груза от пункта производства к пункту потребления представлена в таблице 1.12.

Требуется построить математическую модель для определения такого плана перевозки грузов, с которым были бы связаны наименьшие затраты на перевозку.

Для удобства записи обозначим пункты производства числами 1 и 2 и пункты потребления числами 1, 2 и 3. Построение модели начнем с введения переменных. Обозначим посредством xij объем перевозки (в тоннах) от i-го пункта производства к j-му пункту потребления.

Индекс i принимает одно из двух значений 1 или 2, а индекс j – одно из трех значений 1, 2 или 3. Таким образом, мы ввели 6 переменных. Из них, например, переменная x_{11} соответствует объему перевозок от 1-го пункта производства («Северный») к 1-му пункту потребления («Горный»), а переменная x_{23} – объему перевозок от 2-го пункта производства («Южный») к 3-му пункту потребления («Лесной»).

Таблица 1.12

Затраты на транспортировку 1 т груза

Пункт назначения / Пункт отправления	1. «Горный»	2. «Озерный»	3. «Лесной»
1. Северный	90	80	50
2. Южный	100	120	110

Набор значений переменных x_{ij} – это и есть план перевозок. Поскольку переменные имеют по два индекса, то план удобнее записывать не в виде вектора, а в виде матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}.$$

Математическая модель задачи записывается в следующем виде.

$$\min(90x_{11}+80x_{12}+50x_{13}+100x_{21}+120x_{22}+110x_{23})$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 1500 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 2000 \\ x_{11}+x_{21} \qquad \ge 800 \\ x_{12}+x_{22} \qquad \ge 1600 \\ x_{13}+x_{23} \qquad \ge 1000 \\ x_{11}\ge 0, \quad x_{12}\ge 0, \quad x_{13}\ge 0 \\ x_{21}\ge 0, \quad x_{22}\ge 0, \quad x_{23}\ge 0 \end{cases}.$$

Целевая функция задачи представляет собой сумму произведений стоимостей перевозки 1 т груза на объем перевозки для каждой пары поставщика-потребителя, то есть общую суммарную стоимость всех перевозок, соответствующих плану X. Эту суммарную стоимость следует минимизировать при условии, что будут выполнены все ограничения.

Ограничения на перевозки можно разбить на три группы. Первая группа – это верхние два неравенства. В каждое из них входят переменные с одним и тем же первым индексом, но различными вторыми индексами, то есть переменные, соответствующие одному и тому же пункту производства, но различным пунктам потребления. Каждое из этих неравенств говорит о том, что суммарный объем всех грузов, вывозимых из одного и того же пункта производства в разные пункты потребления, не превосходит того количества продукции, которое может быть произведено в данном пункте производства.

Вторая группа – это следующие три неравенства. В каждое из них входят переменные с одним и тем же вторым индексом, но разными первыми индексами. Эти переменные соответствуют одному пункту потребления, но разным пунктам производства. Такое неравенство утверждает, что объем всего груза, который свозится из разных пунктов производства в один и тот же пункт потребления, должен быть не меньше, чем объем потребности в данном пункте потребления.

Наконец, третья группа ограничений утверждает, что все объемы перевозок неотрицательны.

В данной задаче сумма грузов, имеющихся во всех пунктах производства (3500 т) больше, чем сумма потребностей в грузах, имеющихся во всех пунктах потребления (3400 т). Такая транспортная задача имеет оптимальный план перевозок. Как найти такой оптимальный план – этим вопросом мы займемся позже, но такой план существует. А вот если бы оказалось наоборот, если бы суммарный груз в пунктах производства оказался меньше суммарной потребности в пунктах потребления, то задача оказалась бы неразрешимой. Она не имела бы даже допустимых планов, и тем более не имела бы оптимального.

Если же суммарный груз в пунктах производства в точности равен суммарной потребности в пунктах потребления, то задача имеет решение, и ее математическая модель в этом случае может быть приведена к более удобной форме.

В этом случае из пунктов производства должно быть вывезено все. Это значит, что ограничения первой группы, связанные с пунктами производства, должны выполняться в форме равенства. Точно так же и пункты потребления не могут быть в этом случае удовлетворены с избытком. Следовательно, и ограничения второй группы должны выполнятся в форме равенства.

Таким образом, если, например, потребность третьего пункта потребления равна не 1000 т, а 1100 т, так что суммарный груз в пунктах производства (3500 т) равен суммарной потребности в пунктах потребления (тоже 3500 т), то в математической модели неравенства первых двух групп ограничений могут быть заменены равенствами. Модель в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\min(90x_{11}+80x_{12}+50x_{13}+100x_{21}+120x_{22}+110x_{23})$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=1500 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=2000 \\ x_{11}+x_{21} = 800 \\ x_{12}+x_{22} = 1600 \\ x_{13}+x_{23} = 1100 \\ x_{11}\ge 0,\ x_{12}\ge 0,\ x_{13}\ge 0 \\ x_{21}\ge 0,\ x_{22}\ge 0,\ x_{23}\ge 0 \end{cases}.$$

Неравенства, связанные с пунктами производства и потребления, заменены здесь равенствами. Модель транспортной задачи с ограничениями-неравенствами называется ***открытой моделью***. Модель с ограничениями-равенствами носит название ***закрытой модели***.

Общий вид транспортной задачи

В общем случае имеется m пунктов производства и n пунктов потребления. Пункты производства пронумеруем числами от 1 до m. Номер пункта производства будем обозначать буквой i (таким образом, $1 \le i \le m$). Пункты потребления пронумеруем числами от 1 до n. Номер пункта потребления будем обозначать буквой j (таким образом, $1\le j \le n$). Рассмотрим некоторый период времени (например, месяц). Пусть a_i – объем производства за период времени в i-м пункте производства, b_i – количество продукции, требуемое за период времени в j-м пункте потребления. Пусть c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза из i-го пункта производства в j-й пункт потребления.

Требуется определить план перевозок, удовлетворяющий условиям по пунктам производства и потребления и соответствующий наименьшим затратам на перевозки.

Для построения математической модели следует ввести переменные. Для каждой пары поставщик-потребитель, то есть для каждой пары (i, j), введем переменную x_{ij} – объем перевозки от пункта производства i к пункту потребления j.

Математическая модель транспортной задачи записывается следующим образом:

$$\min \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i=\overline{1,m}) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j \quad (j=\overline{1,n}) \\ x_{ij} \ge 0 \quad (i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}). \end{cases}$$

Целевая функция модели представляет собой общую стоимость всех перевозок. Она записана в виде двойной суммы. Внутренняя сумма соответствует пунктам производства, внешняя – пунктам потребления. Разумеется, эти знаки суммирования в целевой функции можно поменять местами. От перегруппировки слагаемых сумма не изменяется.

В модели указано, что целевую функцию следует минимизировать. Таким образом, модель предписывает искать план перевозок наименьшей общей стоимости.

В системе ограничений представлены три группы неравенств. В первой группе m неравенств, соответствующих пунктам производства. Каждое неравенство утверждает, что из соответствующего пункта не может быть вывезено больше, чем в нем имеется. Во второй группе n неравенств, соответствующих пунктам потребления. Каждое из них требует, чтобы в соответствующий пункт было привезено не меньше, чем требуется. В третьей группе $m \times n$ неравенств, обеспечивающих неотрицательность объема перевозок.

Представленная модель транспортной задачи с ограничениями-неравенствами называется ***открытой моделью***. Задача разрешима в том и только в том случае, когда общий объем груза у поставщиков не меньше суммарной потребности потребителей, то есть когда выполнено неравенство:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Если выполнено обратное неравенство, то есть если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то задача неразрешима, для нее не существует не только оптимального, но даже и допустимого плана.

Если общий объем груза у поставщиков в точности равен общей потребности потребителей, то есть если имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то указанная выше открытая модель эквивалентна более простой ***закрытой модели***, в которой основные неравенства заменены равенствами. Закрытая модель имеет следующий вид:

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}.$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}), \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}), \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}). \end{cases}$$

Моделирование транспортной задачи средствами Excel

Задание 1.8

Ниже приведены образцы решения транспортной задачи средствами процедуры *Поиск решения* в Excel.

Постройте в Excel аналогичную таблицу и проведите расчеты.

Задание 2.9

Теневая цена четвертого пункта отправления равна 2, допустимое увеличение 620, допустимое уменьшение 300. Теневая цена последнего пункта назначения равна 23, допустимое увеличение 600, допустимое уменьшение 1310.

Каков смысл величин теневой цены в данной задаче? Как можно использовать эту информацию при принятии решений?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	**Модель транспортной задачи до решения**																			
2		Минимальные суммарные затраты																		
3		**0**																**Пункты отправления**		
4		**План $\{x_{ij}\}$**																**Отправка**	***Возможности***	**Остатки**
5																		0	*1800*	1800
6																		0	*1200*	1200
7																		0	*4000*	4000
8																		0	*300*	300
9																		0	*4500*	4500
10	**Пункты назнач.**	**Доставка**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
11		***Потребности***	*720*	*850*	*1150*	*230*	*530*	*410*	*480*	*590*	*1230*	*960*	*880*	*550*	*710*	*400*	*1310*			
12		**Остатки**	720	850	1150	230	530	410	480	590	1230	960	880	550	710	400	1310			
13																				
14			***Затраты на перевозку единицы груза $\{c_{ij}\}$***																	
15			*16*	*16*	*17*	*18*	*18*	*20*	*21*	*19*	*20*	*19*	*18*	*20*	*16*	*18*	*18*			
16			*22*	*26*	*25*	*24*	*26*	*21*	*23*	*27*	*23*	*28*	*23*	*24*	*28*	*23*	*25*			
17			*25*	*26*	*23*	*22*	*26*	*23*	*28*	*25*	*25*	*25*	*22*	*23*	*24*	*22*	*25*			
18			*30*	*28*	*26*	*28*	*26*	*27*	*24*	*26*	*22*	*27*	*21*	*26*	*27*	*31*	*29*			
19			*22*	*21*	*23*	*24*	*24*	*26*	*25*	*27*	*24*	*24*	*26*	*25*	*26*	*24*	*23*			

Рис. 1.28. Модель транспортной задачи, подготовленная к решению

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	**Модель транспортной задачи после решения**																			
2		Минимальные суммарные затраты																		
3		239730																**Пункты отправления**		
4		**План $\{x_{ij}\}$**																**Отправка**	***Возможности***	**Остатки**
5			**560**	**0**	**0**	**0**	**530**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**710**	**0**	**0**	1800	*1800*	0
6			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**410**	**480**	**0**	**310**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	1200	*1200*	0
7			**0**	**0**	**1150**	**230**	**0**	**0**	**0**	**590**	**0**	**0**	**880**	**550**	**0**	**400**	**0**	3800	*4000*	200
8			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**300**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	300	*300*	0
9			**160**	**850**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**620**	**960**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1310**	3900	*4500*	600
10	**Пункты назнач.**	**Доставка**	720	850	1150	230	530	410	480	590	1230	960	880	550	710	400	1310			
11		***Потребности***	*720*	*850*	*1150*	*230*	*530*	*410*	*480*	*590*	*1230*	*960*	*880*	*550*	*710*	*400*	*1310*			
12		**Остатки**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
13																				
14			***Затраты на перевозку единицы груза $\{c_{ij}\}$***																	
15			*16*	*16*	*17*	*18*	*18*	*20*	*21*	*19*	*20*	*19*	*18*	*20*	*16*	*18*	*18*			
16			*22*	*26*	*25*	*24*	*26*	*21*	*23*	*27*	*23*	*28*	*23*	*24*	*28*	*23*	*25*			
17			*25*	*26*	*23*	*22*	*26*	*23*	*28*	*25*	*25*	*25*	*22*	*23*	*24*	*22*	*25*			
18			*30*	*28*	*26*	*28*	*26*	*27*	*24*	*26*	*22*	*27*	*21*	*26*	*27*	*31*	*29*			
19			*22*	*21*	*23*	*24*	*24*	*26*	*25*	*27*	*24*	*24*	*26*	*25*	*26*	*24*	*23*			

Рис. 1.29. Модель транспортной задачи с результатами решения

Раздел 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ

Задача максимизации прибыли

Рассмотрим предприятие, которое производит (или покупает) и продает n видов продукции. Занумеруем все виды продукции числами от 1 до n. Объем продаж продукции номер j обозначим посредством Q_j. Он зависит от цены на эту продукцию и, вообще говоря, от цен на продукцию других видов. Влиянием прочих факторов на объем продаж пока пренебрежем. Таким образом,

$$Q_j = Q_j(p_1,\dots p_j,\quad p_n), \qquad (1 \le j \le n)$$

где $p_1,\dots p_j,\quad p_n$ – отпускные цены продукции соответствующих видов.

Обозначим вектор цен посредством P, так что $P = (p_1,\dots p_j,\quad p_n)$. Тогда предыдущее равенство примет вид:

$$Q_j = Q_j(P). \qquad (1 \le j \le n)$$

Объем продаж Q_j не может быть отрицательной величиной, $Q_j \ge 0$. Сами цены тоже не могут быть отрицательными, $p_j \ge 0$.

Общие затраты C, связанные с производством (или закупками) и продажей всех видов продукции, подразделяются на переменную составляющую V и постоянную составляющую F:

$$C = V + F,$$

причем

$$V(P) = \sum_{j=1}^{n} v_j Q_j(P).$$

Выручка от продаж R определяется формулой

$$R(P) = \sum_{j=1}^{n} p_j Q_j(P).$$

Прибыль π есть разность между выручкой и общими затратами

$$\pi(P) = R(P) - C(P) = \sum_{j=1}^{n} p_j Q_j(P) - \sum_{j=1}^{n} v_j Q_j(P) - F.$$

Фирма может устанавливать свои отпускные цены на каждый вид продукции. Задача состоит в том, чтобы определить такие цены, при которых общая прибыль фирмы была бы максимальной.

При таких оптимальных ценах затраты фирмы могут выйти за допустимые границы. Обозначим максимальную допустимую величину затрат посредством S.

Для решения задачи рассмотрим следующую математическую модель:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j Q_j(P) - \sum_{j=1}^{n} v_j Q_j(P) - F \quad \to \quad \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j Q_j(P) + F \le S,$$

$Q_j(P) \ge 0,$

$P \ge 0.$

Модель предполагает максимизацию прибыли при условии, что объемы продукции и цены неотрицательны и общие затраты не выходят за заданные границы.

Отметим, что зависимость $Q_j(P)$ продаж от цен в общем случае не предполагается линейной, так что построенная модель представляет задачу нелинейного программирования. Даже для линейной функции продаж функция выручки является квадратичной, так что перед нами и в этом случае будет задача квадратичного программирования.

Решение таких задач можно реализовать средствами Excel.

Рассмотрим для примера относительно простую ситуацию, когда продажи каждого товара зависят от цены только на этот товар, то есть будем считать, что

$Q_j = Q_j(p_j).$

В простейшей ситуации такая зависимость имеет линейный вид:

$Q_j = a_j p_j + b_j.$

Здесь a_j и b_j – числовые параметры зависимости объема продаж от цены.

В этой ситуации модель примет простой вид:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j (a_j p_j + b_j) - \sum_{j=1}^{n} v_j (a_j p_j + b_j) - F \to \quad \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j (a_j p_j + b_j) + F \le S,$$

$a_j p_j + b_j \ge 0, \qquad (1 \le j \le n)$

$p_j \ge 0. \qquad (1 \le j \le n)$

Целевая функция задачи имеет вторую степень, а все ограничения линейны. Перед нами задача квадратичного программирования.

Для обычной продукции естественно предположить, что параметры удовлетворяют следующим условиям: $a_j < 0$ (с ростом цены объем продаж уменьшается), $b_j > 0$ (при нулевой цене объем продаж положителен).

Условие неотрицательности объемов продаж означает, что цена имеет верхнее предельное значение. Таким образом, цена j-й продукции p_j может принимать значения лишь в диапазоне от 0 (когда объем продаж максимален) до величины, равной $-b_j / a_j$ (когда объем продаж снижается до нулевого уровня).

Для реализации решения задачи зададим численные значения параметров для некоторого числа видов продукции. На рис. 2.1 представлена таблица Excel с конкретными числовыми значениями параметров для 10 видов продукции.

Изменяемыми ячейками задачи являются ячейки пятой строки, то есть ячейки отпускных цен на продукцию. Ячейки объемов продаж, переменных затрат по каждому виду продукции, суммарных переменных затрат, общих затрат, выручки по каждому виду продукции, суммарной выручки и прибыли заполняются расчетными формулами. Ячейка прибыли – M14 – является целевой.

Результат формульного заполнения при пустых ячейках цен представлен на рис. 2.2.

В окне процедуры *Поиск решения* указываем неотрицательность значений изменяемых ячеек C5:L5 и ячеек диапазона C6:L6, а также неравенство, связывающее ячейки M12 и M13.

На рис. 2.3 представлен результат оптимизационного расчета. Оптимальный план предписывает отказаться от продукции № 9. Для остальных видов продукции вычислены их оптимальные объемы и цены.

Мы видим, что необходимые затраты составили 850 231 руб., так что ограничение затрат (1 000 000 рублей) оказалось выполнено с запасом.

Изменим ситуацию. Предположим теперь, что ограничение затрат составляет 600 000 руб. Новый результат оптимизации представлен на рис. 2.4. Оптимальный план теперь предписывает отказаться от продукции № 5, 6, 8, 9. Для остальных видов продукции вычислены их оптимальные объемы и цены. Прибыль снизилась. Необходимые затраты составили ровно 600 000 руб.

Согласно Отчету по устойчивости множитель Лагранжа приблизительно равен 1,73. Эта величина соответствует предельной эффективности ограниченных затрат. Изменение затрат на 1 руб. приведет к изменению результата (то есть прибыли) на 1,73 руб.

Задание 2.1

Определите решение задачи и соответствующие величины множителей Лагранжа для различных вариантов ограничений затрат от 800 000 до 300 000 руб. с шагом 50 000 руб.

Каков смысл множителей Лагранжа? Какова закономерность изменения этих множителей? Как можно использовать знание величины множителя Лагранжа при принятии управленческих решений?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Рассчитать цены и объемы продаж, определяющие максимум прибыли при линейной функции спроса**												**ИТОГО**
2	**N Товара**		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
3	**Параметры функции спроса**	**a**	-0,5	-0,3	-0,1	-0,8	-0,6	-0,7	-0,4	-0,2	-0,4	-0,1	
4	**Q = a*p + b**	**b**	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	
5	**Цена p**												
6	**Объем продаж Q**												
7	**Выручка R**												
8			**Затраты С**										
9	**Уд. переменные v**		200	500	100	150	450	500	170	320	550	600	
10	**Переменные V = v*Q**												
11	**Постоянные F**												300 000
12	**Общие C = F + Σ V**												
13	**Ограничение затрат S**												**1 000 000**
14			**Прибыль**										

Рис. 2.1. Расчетная таблица для численного моделирования задачи максимизации прибыли

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Рассчитать цены и объемы продаж, определяющие максимум прибыли при линейной функции спроса**												**ИТОГО**
2	**N Товара**		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
3	Параметры функции спроса	**a**	-0,5	-0,3	-0,1	-0,8	-0,6	-0,7	-0,4	-0,2	-0,4	-0,1	
4	Q = a*p + b	**b**	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	
5	Цена p												
6	Объем продаж Q		1000,00	900,00	800,00	700,00	600,00	500,00	400,00	300,00	200,00	100,00	
7	**Выручка R**		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
8			**Затраты C**										
9	Уд. переменные v		200	500	100	150	450	500	170	320	550	600	
10	Переменные V = v*Q		200000	450000	80000	105000	270000	250000	68000	96000	110000	60000	1 689 000
11	Постоянные F												300 000
12	Общие C = F + Σ V												1 989 000
13	Ограничение затрат S												**1 000 000**
14			**Прибыль**										**- 1 989 000**

Рис. 2.2. Заполненная расчетная таблица для численного моделирования задачи максимизации прибыли

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Рассчитать цены и объемы продаж, определяющие максимум прибыли при линейной функции спроса**												**ИТОГО**
2	**N Товара**		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
3	Параметры функции спроса	**a**	-0,5	-0,3	-0,1	-0,8	-0,6	-0,7	-0,4	-0,2	-0,4	-0,1	
4	Q = a*p + b	**b**	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	
5	Цена p		1100,00	1750,00	4050,00	512,50	725,00	607,14	585,00	910,00	500,00	800,00	
6	Объем продаж Q		450,00	375,00	395,00	290,00	165,00	75,00	166,00	118,00	0,00	20,00	
7	**Выручка R**		495000	656250	1599750	148625	119625	45536	97110	107380	0	16000	3 285 276
8			**Затраты C**										
9	Уд. переменные v		200	500	100	150	450	500	170	320	550	600	
10	Переменные V = v*Q		90000	187500	39500	43500	74250	37500	28220	37760	0	12000	550 231
11	Постоянные F												300 000
12	Общие C = F + Σ V												850 231
13	Ограничение затрат S												**1 000 000**
14			**Прибыль**										**2 435 046**

Рис. 2.3. Результат оптимизации прибыли при суммарных затратах, ограниченных 1 000 000 руб.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Рассчитать цены и объемы продаж, определяющие максимум прибыли при линейной функции спроса**												**ИТОГО**
2	**N Товара**		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
3	**Параметры функции спроса Q = a*p + b**	**a**	-0,5	-0,3	-0,1	-0,8	-0,6	-0,7	-0,4	-0,2	-0,4	-0,1	
4		**b**	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	
5	**Цена p**		1273,21	2183,03	4136,60	642,41	1000,00	714,29	732,23	1187,14	500,00	1000,00	
6	**Объем продаж Q**		363,39	245,09	386,34	186,07	0,00	0,00	107,11	62,57	0,00	0,00	
7	**Выручка R**		462677	535040	1598134	119535	0	0	78428	74282	0	0	2 868 095
8			**Затраты C**										
9	**Уд. переменные v**		200	500	100	150	450	500	170	320	550	600	
10	**Переменные V = v*Q**		72679	122545	38634	27911	0	0	18208	20023	0	0	300 000
11	**Постоянные F**												300 000
12	**Общие C = F + Σ V**												600 000
13	**Ограничение затрат S**												**600 000**
14			**Прибыль**										**2 268 095**

Рис. 2.4. Результат оптимизации прибыли при суммарных затратах, ограниченных 600 000 руб.

Задача размещения свободных средств

Общая характеристика модели

Рынок банковских услуг становится все более насыщенным, а конкуренция на нем все более острой. Банки пытаются привлечь клиентов не только выгодными условиями договоров, но и предоставлением дополнительных возможностей обслуживания. Одна из таких дополнительных услуг состоит в предоставлении каждому клиенту оптимального индивидуального графика размещения на депозитах временно свободных средств данного клиента.

На решение этой задачи направлена модель ПОИСК (Планирование Оптимального Использования Средств Клиента).

Объем свободных средств клиента меняется во времени. Может оказаться, что клиент имеет значительную сумму свободных средств, которую он мог бы разместить на депозите на длительный срок под большую процентную ставку. Однако внутри этого срока есть краткие периоды, когда ему необходимо отвлечь часть этих средств.

Модель предусматривает не только размещение депозитов, но и возможность получения встречных кредитов для покрытия временных разрывов в суммах свободных средств. Она учитывает необходимость уплаты процентов по кредитам и возможность вложений (капитализации) процентов по депозитам.

К входным параметрам модели ПОИСК относятся:

- параметры вариантов депозитов банка;
- параметры вариантов кредитов банка;
- продолжительность горизонта планирования и данные по динамике свободных средств клиента на данном горизонте планирования;
- максимально допустимое число депозитов и кредитов, размещаемых на горизонте планирования.

Результатом решения задачи по модели является оптимальный план размещения свободных средств клиента на заданном горизонте планирования с указанием сроков начала, конца и суммы каждого из депозитов и кредитов.

Оптимальность плана подразумевает максимально возможную прибыль клиента от размещения свободных средств с учетом дополнительного изменения свободных средств за счет получаемых процентов по депозитам и уплачиваемых процентов по кредитам, то есть максимальную разность между суммой процентов по депозитам и суммой процентов по кредитам на всем горизонте планирования.

Термины

В модели ПОИСК участвуют характеристики депозитов и кредитов. С модельной точки зрения различия между депозитами и кредитами сводятся лишь к тому, что сумма депозита есть величина положительная, а сумма кредита – отрицательная. Таким образом, депозит от кредита в модели отличается лишь знаком своей величины.

Для простоты изложения мы используем в модели термин ***декред***. Под ***декредом*** понимается депозит во всех случаях, когда величина декреда положительна и понимается кредит во всех случаях, когда величина декреда отрицательна.

Процентная ставка для положительных декредов начисляется по правилам начисления ставки для депозитов, а для отрицательных декредов начисляется по правилам начисления ставки для кредитов.

Процентный доход по декреду – это проценты (процентные деньги). При положительной величине декреда это проценты, получаемые клиентом банка по депозиту. Доход по декреду в этом случае имеет положительную величину. При отрицательной величине декреда это проценты, уплачиваемые клиентом банка по кредиту. Доход по декреду в этом случае имеет отрицательную величину.

Обозначения

N – горизонт планирования, измеряемый в днях; порядковый номер дня в рамках данного горизонта будем обозначать буквой n, так что
$1 \le n \le N$.

M – общее число декредов. Порядковый номер декреда будем обозначать буквой m, так что $1 \le m \le M$.

t – длительность декреда, измеряемая в годах (число дней декреда, деленное на число дней года).

P – размер декреда в денежных единицах.

g(t, P) – годовая процентная ставка, определяемая длительностью и размером декреда; размер ставки определяется по соответствующей таблице банковских ставок.

x – день начала декреда.

h(x, t, n) – *характеристическая функция*, принимающая значение 1, если $x \le n < x+t$, и принимающая значение 0 во всех остальных случаях. Другими словами, h(x, t, n)=1 тогда и только тогда, когда день номер n оказывается в пределах, начиная от дня x и кончая днем x+t, включая день x и исключая день x+t.

d(x, t, n) – *сигнальная функция*, принимающая значение 1, если n=x+t, и принимающая значение 0 во всех остальных случаях. Сигнальная функция может быть определена самостоятельно или же выражена через характеристическую функцию следующим образом:

$d(x, t, n) = h(x, t+1, n) – h(x, t, n)$.

Y_n – планируемые свободные средства клиента в день n.

K – предельная допустимая сумма кредита для клиента.

L – предельный срок кредита.

Соотношения

P – размер декреда. При P>0 эта величина рассматривается как депозит, при P<0 – как кредит. При P=0 декред можно рассматривать и как депозит, и как кредит.

$P \geq -K$. Это ограничение для любого депозита выполняется автоматически. Для кредита оно обеспечивает запрет превышения установленной предельной кредитной суммы.

Если предельный размер кредитной суммы мы заранее не устанавливаем, то предельная величина K отсутствует и из модели устраняется связанное с ней неравенство $P_m \geq -K$.

$t \geq 0$ – срок декреда, срок не может быть отрицательной величиной.

$sign(P_m)*t_m \geq -L$. Это ограничение для любого депозита выполняется автоматически. Для кредита это ограничение обеспечивает запрет превышения установленного предельного срока. (Здесь sign – известная математическая функция, равная 1, 0 или –1 в соответствии со знаком аргумента).

Если для кредитов не установлен предельный срок, то величина L отсутствует и из модели устраняется связанное с ней неравенство:

$sign(P_m)*t_m \geq -L$.

$1 \leq x \leq N$ – декред должен начинаться в пределах горизонта планирования.

$1 \leq x+t \leq N$ – декред должен заканчиваться в пределах горизонта планирования.

$v_n = \sum_{m=1}^{M} d(x_m, t_m, n)*P_m*t_m*g(t_m, P_m)$ – суммарный процентный доход по всем декредам, получение процентов по которым приходится на день n.

Функция $d(x_m, t_m, n)$ является сигнальной функцией о наступлении дня поступления процентов по декреду номер m. Она равна 1 тогда и только тогда, когда $n=x_m+t_m$, то есть когда n есть день поступления процентов по декреду номер m, то есть по декреду, начинающемуся в день x_m и имеющему продолжительность t_m. Во все остальные дни n выражение $d(x_m, t_m, n)$ для декреда номер m равно 0.

В сумму, определяющую величину v_n, процентные доходы $P_m*t_m*g(t_m, P_m)$ входят со знаком «+» или «–» в соответствии со знаком величины P_m. Таким образом, процентные доходы по депозитам входят со знаком «+», а процентные затраты по кредитам – со знаком «–», так что эта сумма для каждого дня n представляет собой разность процентных доходов по депозитам и процентных затрат по кредитам, приходящимся на этот день.

$v_1 = 0$ – начальное условие для первого дня горизонта планирования. Оно выполняется автоматически в силу свойств функции d. Ни по какому декреду в первый день горизонта планирования проценты поступить не могут.

V_n – суммарный процентный доход по всем декредам, получение процентов по которым приходится на дни от начала горизонта планирования по день n включительно. Величина V_n рассчитывается рекуррентно по формулам:

$V_1 = v_1$,

$V_n = V_{n-1} + v_n$ для всех n от 2 по N.

V_N определяет суммарный процентный доход по всем декредам на всем горизонте планирования.

Величина V_N является целевой функцией модели.

$\sum_{m=1}^{M} P_m * h(x_m, t_m, n)$ – формула расчета суммы всех средств, размещенных на декредах на день n.

Функция $h(x_m, t_m, n)$ является характеристической функцией, говорящей о том, что день n входит в состав срока декреда. Она равна 1 тогда и только тогда, когда $x_m \le n < x_m+t_m$, то есть когда n входит в промежуток времени от начала до конца декреда номер m, начинающегося в день x_m и имеющего продолжительность t_m. При этом день x_m+t_m – день поступления процентов по этому декреду оказывается исключенным. В этот день и во все остальные дни n эта функция для декреда m равна 0.

В приведенную выше формулу расчета суммы всех средств, размещенных на декредах на день n, депозиты входят со знаком «+», а кредиты со знаком «–», так что эта сумма представляет собой разность средств между суммой депозитов и суммой кредитов на день n.

$\sum_{m=1}^{M} P_m * h(x_m,\ t_m,\ n) \le Y_n + V_n$ – ограничение, обеспечивающее для любого дня n возможность размещения на декредах свободных на этот день средств.

Переменные и целевая функция

Переменными модели являются три характеристики для каждого декреда m: сумма декреда P_m, день начала декреда x_m и продолжительность декреда t_m. Другими словами, модель для каждого m содержит 3 переменных: размер декреда, день его начала и его длительность. Общее число переменных равно 3M.

Это набор тех величин, которые следует определить в результате решения оптимизационной задачи. Они и составляют план размещения декредов.

Целевой функцией модели является суммарный доход по всем декредам на всем горизонте планирования, то есть величина V_N, где N – последний день горизонта планирования.

Математическая модель ПОИСК

$V_N \to \max$

при условиях:

$$v_n = \sum_{m=1}^{M} d(x_m, t_m, n) * P_m * t_m * g(t_m, P_m), \qquad (n = 1 \div N)$$

$V_1 = v_1,$

$V_n = V_{n-1} + v_n, \qquad (n = 2 \div N)$

$$\sum_{m=1}^{M} P_m * h(x_m,\ t_m,\ n) \le Y_n + V_n, \qquad (n = 1 \div N)$$

$P_m \ge\ge -K, \qquad (m = 1 \div M)$

$\mathrm{sign}(P_m) * t_m \ge -L, \qquad (m = 1 \div M)$

$t_m \ge 1, \qquad (m = 1 \div M)$

$1 \le x_m \le N, \qquad (m = 1 \div M)$

$1 \le x_m + t_m \le N, \qquad (m = 1 \div M)$

$x_m \in Z,\ t_m \in Z. \qquad (m = 1 \div M)$

Последняя строка означает целочисленность переменных x_m, t_m.

Моделирование портфеля проектов

Рассмотрим задачу оптимизации портфеля инвестиционных проектов.

В основу моделей портфеля проектов положены следующие предположения.

1. Имеется некоторое потенциальное множество инвестиционных проектов, и задан общий горизонт планирования. Из множества проектов требуется сформировать портфель, то есть сформировать набор проектов, предназначенных для реализации в пределах горизонта планирования, с указанием сроков выполнения каждого проекта.
2. Тот или иной проект может быть выполнен лишь в определенных условиях. Часть таких условий может быть сформирована в результате выполнения других проектов. В частности, некоторые проекты могут начаться только после завершения некоторых других проектов. Другие проекты могут быть реализованы лишь в определенном интервале времени, когда будут существовать прогнозируемые необходимые внешние условия.
3. Реализация проекта требует затрат финансовых ресурсов. Эти затраты относятся к периодам времени реализации проекта.
4. Проект имеет финансовые результаты. Эти результаты могут охватывать продолжительное время после реализации проекта. Они могут, в общем случае, использоваться для финансирования других проектов или других этапов данного проекта в последующие периоды времени.
5. Время в модели дискретно и представлено в виде последовательности периодов. Проекты, требующие нескольких периодов для своей реализации, разбиваются на отдельные этапы (части), каждый из которых занимает один период. При таком разбиении реализация очередного этапа требует обязательной реализации предыдущих этапов.

Разбиение на этапы позволяет сделать модель гибкой, учесть самые разнообразные варианты соединения этапов, от предельно жесткого, когда один этап однозначно следует за другим, до предельно свободного, когда каждый этап превращается в отдельный проект.

Формирование портфеля нацелено на получение максимальных финансовых результатов при заданных ограничениях по затратам, логико-временным и финансовым связям проектов, входящих в портфель.

Математическая модель формирования портфеля

Проекты, этапы и время

Пусть M – общее число проектов, анализируемых на предмет включения в портфель с целью последующей реализации. Пронумеруем все проекты числами от 1 до M, символом m будем обозначать номер проекта, так что $1 \leq m \leq M$.

Для каждого проекта задано время его выполнения, то есть количество периодов времени его выполнения и, тем самым, число его этапов. Число этапов проекта m, его «длину», будем обозначать посредством lh(m).

Пусть T – горизонт планирования, символом t будем обозначать номер периода времени, так что $1 \leq t \leq T$.

Затраты

Посредством u_{mkt} обозначим затраты по реализации k-го этапа проекта m в периоде времени t. Таким образом, объем затрат по выполнению определенного этапа того или иного проекта в общем случае предполагается зависящим не только от самого проекта и от этапа его выполнения, но и от периода времени t, на который приходится данный этап.

Один и тот же этап одного и того же проекта в разные периоды времени может быть связан с разными объемами затрат. Причинами этого могут быть прогнозируемые изменения как во внешней среде, так и в характеристиках внутреннего состояния системы (инфляционные изменения, динамика валютного курса, изменения налогового законодательства, износ оборудования, изменения затрат по модернизации оборудования, по оплате труда). Эти затраты относятся к периоду t.

Введенные обозначения имеют смысл не для всех комбинаций индексов. Так, номер этапа проекта m должен быть в пределах от 1 до lh(m). Сам номер проекта m должен быть в пределах от 1 до M. Номер периода времени t также должен быть в пределах от 1 до T.

В дальнейшем, при построении и исследовании моделей, мы будем полагать величину затрат u_{mkt} равной 0 во всех тех случаях, когда комбинация индексов теряет смысл.

Обозначим посредством U_{mt} суммарные затраты по реализации проекта номер m, начинающейся в периоде t. Тогда U_{mt} определится формулой:

$$U_{mt} = \sum_{j=1}^{lh(m)} u_{mj,t+j-1}\,.$$

Посредством W_t обозначим плановую предельную допустимую сумму затрат на проведение всех проектов в периоде времени t.

Посредством W будем обозначать общую сумму плановых затрат на проведение всех проектов по всему горизонту планирования T, то есть

$$\sum_{t=1}^{T} W_t = W.$$

Обозначим посредством w_t реально используемую сумму затрат на проведение всех проектов в периоде времени t. Таким образом, в каждом периоде времени t должно выполняться неравенство

$$w_t \le W_t.$$

Допустимые объемы затрат W_t, выделенные для данного периода t, могут оказаться использованными не полностью. Неиспользованный объем определяется разностью Δ_t:

$$\Delta_t = W_t - w_t.$$

Доходы

Посредством d_{mkt} обозначим доход, получаемый в периоде времени t на k-м этапе от начала реализации проекта номер m.

Таким образом, размер дохода может зависеть не только от самого проекта и от периода получения дохода, но и от времени реализации проекта. Естественным условием является неравенство $k \ge 1$. Оно означает, что получение дохода от реализации проекта не может начаться раньше начала осуществления данного проекта. При выполнении обратного условия, то есть при выполнении неравенства $k < 1$, величину d_{mkt} будем полагать равной 0.

Время, стоимость и дисконтирование

В модели может быть предусмотрена возможность переноса неиспользованных объемов затрат или полученных доходов на последующие периоды. Перенос средств из периода в период может осуществляться с учетом их возможного роста по соответствующей ставке.

Доходы, выходящие за пределы горизонта планирования, дисконтируются и приводятся к концу горизонта планирования, к концу периода T.

Посредством q обозначим ставку дисконтирования за один период времени, позволяющую пересчитывать объемы платежей при переходе от одного периода к другому. В частном случае, при q = 0, получаем недисконтированные пересчеты.

Переменные и условия

Введем переменные. Посредством x_{mt} обозначим факт начала реализации проекта m в периоде времени t. Таким образом,

$$x_{mt} = \begin{cases} 1, & \textit{если период времени } t \textit{ является начальным периодом} \\ & \textit{реализации проекта } m, \\ 0, & \textit{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Если неизвестно точное время начала проекта m, но известно, что он должен начаться в промежутке от t_1 до t_2, то такое условие можно задать в виде равенства:

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} x_{mt} = 1.$$

Посредством x_m обозначим сумму переменных x_{mt} по всем t:

$$x_m = \sum_{t=1}^{T} x_{mt}.$$

Таким образом, условие $x_m \le 1$ означает, что проект номер m может начаться не более одного раза, то есть начинается один раз или не начинается вообще. Дополнительное условие:

$$\sum_{t=T-lh(m)+2}^{T} x_{mt} = 0$$

означает, что проект m не может начаться слишком поздно, так, чтобы успеть закончиться в пределах горизонта планирования. Это равенство позволяет предыдущие условия записать с помощью более коротких сумм. Напомним, что посредством lh(m) обозначается длительность реализации проекта m, выражаемая числом периодов времени или числом этапов реализации проекта.

Для включения в модель мы всю эту совокупность условий выразим в виде следующей системы:

$x_{mt} \in \{0; 1\}$ для всех t, удовлетворяющих условию $1 \le t \le T$,

$x_{mt} = 0$ для всех t, удовлетворяющих условию $T - lh(m) + 2 \le t \le T$,

$$x_m = \sum_{t=1}^{T} x_{mt}, \qquad x_m \le 1.$$

Такая система условий будет подразумеваться включенной в модель для каждого проекта m.

Логико-временные связи

Логические связи несложно ввести в модель, сделав ее нелинейной, используя, например, произведение переменных или другие нелинейные функции. Произведение переменных традиционно используется при формализации конъюнкции условий, выражаемой союзом «и». В представленных далее построениях мы обращали специальное внимание на то, чтобы не выходить за рамки линейных моделей с булевыми (двоичными) переменными.

Предположим, что обязательно должна быть выполнена целая группа проектов: проекты с номерами m_1, m_2, …m_s. Это можно формально выразить различными способами. Например, в виде системы условий:

$$x_{m_1} = 1, \qquad x_{m_2} = 1, \qquad \ldots \quad x_{m_s} = 1.$$

Другой способ – написать одно равенство:

$$x_{m_1} + x_{m_2} + \ldots + x_{m_s} = s.$$

Предположим, что из некоторой группы проектов с номерами m_1, . . . m_s в портфель обязательно должны быть включены по крайней мере r проектов (с заранее не определенными номерами).

Тогда в модель вводится условие

$$x_{m_1} + \ldots + x_{m_s} \ge r.$$

Это условие обеспечивает равенство 1 по крайней мере r членов из s слагаемых, входящих в сумму, то есть обеспечивает включение в портфель по крайней мере r проектов.

Рассмотрим моделирование основных логических связей между проектами.

Конъюнкция (союз «и», логическое умножение). Пусть требуется, чтобы все s проектов данной группы обязательно вошли в портфель. Тогда в неравенстве следует положить r = s. Условие примет вид:

$$x_{m_1} + \ldots + x_{m_s} \ge s,$$

что обеспечит равенство 1 всех s слагаемых, входящих в сумму, то есть обеспечивает включение в портфель всех s проектов.

Дизъюнкция (союз «или», логическое сложение). Пусть требуется, чтобы хотя бы один из s проектов данной группы обязательно вошел в портфель. Тогда в неравенстве следует положить r = 1. Условие примет вид:

$$x_{m_1} + \ldots + x_{m_s} \geq 1,$$

что обеспечит равенство 1 по крайней мере одного из s слагаемых, входящих в сумму, то есть обеспечит включение в портфель одного из s проектов.

Отрицание (частица «не»). Пусть требуется, чтобы ни один из проектов данной группы не вошел в портфель. Тогда в модель вводим условие:

$$x_{m_1} + \ldots + x_{m_s} = 0.$$

Оно обеспечивает равенство 0 всех s слагаемых, входящих в сумму, то есть обеспечивает невключение в портфель каждого из s проектов.

Разумеется, невключение в портфель той или иной группы проектов можно промоделировать и другими способами. Например, просто исключить из модели соответствующие переменные. Приведенный выше способ удобен при вариантном анализе, когда можно, не изменяя состав переменных, оперативно модифицировать систему ограничений.

Импликация (союз «если, то»). Предположим, что проект номер m может начаться только после окончания проекта номер n. Вводим в модель систему неравенств:

$$x_{mt} - \sum_{i=1}^{t-lh(n)} x_{ni} \leq 0, \qquad 1 \leq t \leq T.$$

Подразумевается, что если верхний предел суммирования оказывается меньше нижнего, то сумма равна 0.

Рассмотрим условие в виде неравенства подробнее.

Если проект m не реализуется, то величины x_{mt} для всех t равны 0. При этом неравенство будет выполнено.

Если же проект m реализуется, то x_{mt} для некоторого t будет равно 1. Подставим это x_{mt} в неравенство. Для того чтобы оно было выполнено, необходимо, чтобы сумма была не меньше 1. А для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы для некоторого периода времени i началось выполнение проекта n. При этом, согласно неравенству, период i наступает раньше, чем период t, по крайней мере на lh(n) периодов времени. Следовательно, проект n начнется и успеет закончиться до начала проекта m.

Условия в виде неравенств можно модифицировать. Предположим, что проект m может начинаться не просто после окончания проекта n, а не менее чем через j периодов времени после окончания n. Система неравенств

$$x_{mt} - \sum_{i=1}^{t-lh(n)-j} x_{ni} \le 0, \qquad 1 \le t \le T$$

обеспечивает зазор между концом выполнения проекта n и началом выполнения проекта m по крайней мере в j периодов времени.

Рассмотрим другой вариант. Предположим, что проект m может начинаться и до окончания проекта n, но все-таки когда в реализации проекта n прошло определенное число этапов. Система неравенств

$$x_{mt} - \sum_{i=1}^{t-lh(n)+j} x_{ni} \le 0, \qquad 1 \le t \le T$$

обеспечивает начало выполнения проекта m не ранее чем за j этапов до окончания проекта n.

Комбинации формально выраженных условий позволяют выразить самые разнообразные логические связи, накладываемые на выполнение проектов.

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть, например, требуется, чтобы были выполнены проекты (m_1 или m_2) и (m_3 или m_4).

Это выражается системой неравенств

$$x_{m_1} + x_{m_2} \ge 1,$$

$$x_{m_3} + x_{m_4} \ge 1.$$

Рассмотрим другой пример. Пусть теперь требуется, чтобы были выполнены проекты (m_1 и m_2) или (m_3 и m_4).

Введем дополнительные булевы переменные y_1 и y_2. С их помощью данное требование выразится следующей системой неравенств:

$$x_{m_1} + x_{m_2} \ge 2y_1,$$

$$x_{m_3} + x_{m_4} \ge 2y_2.$$

$$y_1 + y_2 \ge 1.$$

$$y_1,\ y_2 \in \{0;1\}.$$

Согласно последнему неравенству, обе переменные y_1 и y_2 не могут одновременно равняться 0. По крайней мере, одна из них должна быть равна 1. Таким образом, в правой части, по крайней мере, одного из двух верхних неравенств стоит 2. Следовательно, в этом неравенстве каждая из сумм слева равна 1, то есть каждый из проектов, указанных в этих суммах, должен быть реализован.

Моделирование затрат и доходов

Сконструируем теперь формулы и условия для затрат, связанных с реализацией проектов.

Рассмотрим сначала случай, когда заранее известен начальный период реализации проекта m. Пусть этим периодом является период t. Суммарные затраты U_{mt} по реализации проекта m, начинающегося в периоде времени t, описываются формулой:

$$U_{mt} = \sum_{j=1}^{lh(m)} u_{mj,t+j-1} .$$

Рассмотрим теперь случай, когда начальный период реализации проекта m заранее не известен. Суммарные затраты U_m по реализации проекта m, начинающегося в заранее не известном периоде времени, описываются формулой:

$$U_m = \sum_{t=1}^{T} U_{mt} \cdot x_{mt} .$$

При любой реализации проекта в этой формуле среди переменных x_{mt} лишь одна из переменных (лишь для одного значения t) будет равна 1,
остальные будут равны 0. Таким образом, будет выполнено равенство $U_m = U_{mt}$ для некоторого, заранее не известного значения t.

Мы рассмотрели формулы затрат по реализации данного проекта. Рассмотрим теперь формулы затрат по реализации всех проектов, приходящихся на данный период времени. Такие затраты для периода времени t мы обозначили выше посредством w_t.

Величина w_t определится формулой:

$$w_t = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{t} x_{m,t-k+1} \cdot u_{mkt} .$$

Согласно написанной формуле суммируются затраты по всем проектам, начинающимся не позднее периода t, с учетом этапа данного проекта (номер этапа k) и периода его выполнения.

Указанное в формуле суммирование до периода t можно заменить суммированием до горизонта T, единого для всех проектов. Результат будет таким же, поскольку, согласно сформулированным выше соглашениям, величины u_{mkt} с бессмысленным сочетанием индексов автоматически обращаются в 0.

Аналогичным образом формируются доходы по периодам времени. Обозначим доходы, полученные в периоде времени t от реализации проектов, посредством c_t. Эта величина определяется условием:

$$c_t = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{t} x_{m,t-k+1} \cdot d_{mkt}.$$

Модели

Мы построим и исследуем несколько вариантов моделей формирования портфеля проектов, от сравнительно простых к более сложным.

Первоначальные варианты отличаются относительно небольшим объемом исходной информации и простотой структуры модели. Расчет по таким моделям начинается с предварительного ввода какого-то варианта расстановки проектов во времени. Моделирование нацелено на дальнейшую оптимизацию такого варианта. Полученный результат может быть изменен и опять предложен модели в качестве нового исходного варианта. Такой процесс последовательного изменения и уточнения может продолжаться до получения приемлемого портфеля проектов. Итоговый вариант решения получается в результате последовательного уточнения, в результате диалога пользователя с компьютерной реализацией модели.

Дальнейшие, усложняющиеся варианты моделей предполагают более значительный объем исходной информации и более автоматизированную процедуру поиска оптимального портфеля проектов. Разумеется, и здесь возможен диалог пользователя с компьютерной реализацией модели, но при этом программа работает с большим объемом информации и берет на себя значительно больший объем работы.

Модель с целевым доходом (Модель 1)

Данная модель нацелена на то, чтобы пользователь мог сам расставить проекты по периодам времени, в соответствии со своими представлениями об уместных сроках начала их исполнения. Заранее определенный совокупный объем затрат может быть распределен по периодам времени в соответствии с потребностями.

Компьютерная реализация модели автоматически выбирает из всей предъявленной совокупности проектов оптимальный портфель. Такой портфель проектов вписывается в заранее определенный совокупный объем затрат и обеспечивает в этих рамках максимальный суммарный эффект.

Предположения Модели 1

1. Финансовые затраты по реализации проектов и доходы от их реализации не зависят от времени, то есть не меняются при переносе проектов на другие периоды времени. Платежи не дисконтируются (ставка дисконтирования q равна 0). Такие условия естественны для относительно стабильных ситуаций, при небольшом горизонте планирования T, когда дисконтированием финансовых потоков можно пренебречь.

2. Для каждого периода времени t определен допустимый объем затрат W_t на реализацию проектов в данном периоде.

3. Для каждого проекта m известен срок его начала. Таким образом, среди переменных x_{mt} для данного проекта m заранее определен номер t периода начала реализации проекта.

4. Целью является максимизация суммы доходов от реализации проектов к концу периода T.

Обозначения переменных и параметров, введенные для моделей общего вида, можно упростить применительно к Модели 1 в соответствии с ее предпосылками. Введем эти упрощения.

<u>Обозначения переменных</u>. Согласно пункту 3, вместо переменных x_{mt} можно использовать переменные x_m, поскольку для заданного проекта m номер начального периода t определен.

<u>Обозначения затрат</u>. Поскольку начальный период реализации проекта определен, то известно начало отсчета этапов реализации проекта, и тем самым известна привязка номеров этапов к номерам периодов времени в перечне от 1 до T. Затраты по данному проекту в периодах до начала и после окончания его реализации можно заранее положить равными 0.

Обозначениям u_{mkt}, определяющим затраты в периоде t по реализации k-го этапа проекта m, можно придать более простой вид. Номер проекта m и номер периода времени t однозначно определяют номер этапа проекта k. Индекс k в этих условиях является избыточным. Достаточно использовать индексы m и t, опустив номер этапа k. Вместо u_{mkt} будем использовать обозначение v_{mt}. Величина v_{mt} – это затраты по реализации того этапа проекта m, который приходится на период времени t. Связь между обозначениями можно выразить следующей формулой:

$$v_{mt} = u_{m,k,t-k+1} .$$

Обозначения доходов. В условиях 1 и 4 общий доход, подлежащий максимизации, можно представить как простую сумму доходов от реализации проектов, вошедших в итоговый портфель. Поэтому во введенных обозначениях доходов d_{mkt} можно в Модели 1 опустить индексы k и t и использовать более простое обозначение d_m.

Модель 1 в этих обозначениях является задачей линейного программирования с булевыми переменными x_m, и системой ограничений в соответствии с допустимыми объемами затрат в каждом периоде времени.

$$\sum_{m=1}^{M} d_m x_m \quad \to \quad \max$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{M} v_{m1} x_m \quad \le \quad W_1 \\ \sum_{m=1}^{M} v_{m2} x_m \quad \le \quad W_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{m=1}^{M} v_{mT} x_m \quad \le \quad W_T \\ x_m \in \{0;1\}, \quad m = 1 \div M. \end{cases}$$

Модель предписывает из всей рассматриваемой совокупности выбрать такой портфель проектов, который удовлетворяет ограничениям по затратам в каждом периоде времени и при этом дает максимальный совокупный размер дохода.

Рассмотрим сначала вариант модели, когда горизонт планирования ограничен одним периодом, то есть когда T = 1. В такой ситуации во всех обозначениях можно опустить указание на номер периода времени t. Модель примет более простой вид:

$$\sum_{m=1}^{M} d_m x_m \quad \to \quad \max$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{M} v_m x_m \quad \le \quad W \\ x_m \in \{0;1\}, \quad m = 1 \div M. \end{cases}$$

Отметим, что даже такой простейший вариант модели уже позволяет обнаружить любопытные эффекты и отвергнуть часто используемые ложные предпосылки решений.

Напрашивающимся и обычно используемым способом построения портфеля в таких рамках является следующий. Определим сначала рентабельность каждого проекта, вычислив отношение дохода к затратам. Для m-го проекта величина рентабельности p_m определится формулой:

$p_m = d_m / v_m$.

Затем упорядочим проекты от наиболее рентабельных к наименее рентабельным. Далее будем включать в портфель проекты последовательно, один за другим, начиная от наиболее рентабельных к менее рентабельным. При этом будем суммировать затраты по включенным в портфель проектам. Формирование портфеля закончим тогда, когда включение очередного проекта выводит за рамки допустимого объема затрат W. Описанное правило формирования портфеля назовем «правилом выбора по рентабельности».

Такое простое и, на первый взгляд, естественное правило может дать неверный результат. Приведем соответствующий пример.

Пусть имеется 10 проектов, то есть M = 10. Исходные характеристики проектов по затратам и результатам, а также расчетная величина рентабельности приведены в таблице 2.1.

Наибольшую рентабельность имеет 6-й проект, за ним следует 5-й и так далее, вплоть до 1-го.

Предположим, что общая сумма затрат W определена величиной 1900. Тогда по правилу выбора по рентабельности в портфель следует включать последовательно проекты с номерами 6, 5, 7, 10, 4.

Таблица 2.1

Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Затраты v_m	50	600	650	190	240	350	560	1160	580	135
Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60
Рентаб. p_m	0,100	0,333	0,323	0,421	0,542	0,600	0,536	0,302	0,379	0,444

Суммарные затраты будут при этом равны 1475. Дополнительная попытка включения 9-го проекта сделает сумму затрат равной 2055, то есть выведет ее за пределы ограничения в 1900.

Таким образом, портфель проектов, сформированный по правилу рентабельности, содержит пять наиболее рентабельных проектов. Суммарный эффект при этом равен 780.

Этот эффект не максимален, то есть сформированный по правилу рентабельности портфель не оптимален. Действительно, исключим из портфеля 4-й проект и включим вместо него менее рентабельный 9-й. Суммарные затраты по новому варианту портфеля равны 1865, то есть по-прежнему вписываются в ограничения. Суммарный эффект равен 920, он превосходит эффект 780 предыдущего варианта.

Мы видим, что на первый взгляд естественные правила, типа правила рентабельности, не пригодны уже в простейшей модели. Тем более они не пригодны в более сложных случаях. Причина здесь кроется, естественно, в дискретности переменных модели. Проекты в портфель целиком включаются или целиком не включаются.

Для построения оптимального портфеля следует использовать специальные методы оптимизации. Для простейшей модели естественно воспользоваться методами решения задач линейного программирования с булевыми переменными. Соответствующие алгоритмы, основанные на соединении симплекс-метода с методом ветвей и границ, реализованы в виде встроенной процедуры «Поиск решения» в табличном процессоре Excel. Продемонстрируем решение приведенного выше примера.

В таблице 2.2 дано представление исходных данных для решения задачи в Excel.

Ячейки второй строки «Портфель» соответствуют переменным x_m. Первоначально они пусты. В остальных заполненных ячейках столбцов B – K содержатся исходные данные по номеру проекта, а также по затратам и доходам от его реализации. В ячейке M3 допустимая сумма затрат W по реализации портфеля проектов. Это числовые данные.

Таблица 2.2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2	**Портфель**											Требуемая сумма	Допустимая сумма
3	Затраты v_m	50	600	650	190	240	350	560	1160	580	135	0	1900
4	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**0**	

В ячейке L3 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B$2:K$2; B3:K3), выражающая на языке Excel левую часть ограничения по затратам. В ячейке L4 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B$2:K$2; B4:K4), выражающая на языке Excel целевую функцию задачи. Знаки $ закрепляют ссылки и позволяют вводить формулы путем копирования. Кроме того, они полезны при дальнейших модификациях модели.

При обращении к процедуре «Поиск решения» следует в качестве целевой ячейки указать $L$4 и потребовать ее максимизировать. В полях ограничений ввести неравенство $L$3 <= $M$3 и указать, что переменные булевы (на языке Excel – двоичные).

После нажатия кнопки «Выполнить» получим решение задачи. Результат решения представлен в таблице 2.3.

Мы еще раз видим, что «правило выбора по рентабельности» не действует. Полученное оптимальное решение совпадает с тем, которое было предложено нами выше.

Таблица 2.3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2	**Портфель**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	Требуемая сумма	Допустимая сумма
3	Затраты v_m	50	600	650	190	240	350	560	1160	580	135	1865	1900
4	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**920**	

Несложные модификации построенной компьютерной модели позволяют получать новые, существенно отличающиеся варианты. Так, она легко модифицируется для варианта, когда реализация проекта требует нескольких периодов времени и допустимые объемы затрат W_t заданы для каждого периода отдельно. Для этого в ней следует добавить T – 1 новую строку с числовыми данными по затратам в отдельных периодах и протянуть по столбцу L ячейку с уже существующей формулой затрат. В полях ограничений процедуры «Поиск решения» ввести единое неравенство между диапазонами ячеек с требуемой и допустимой суммой затрат. Целевая ячейка остается прежней. Модель готова к работе.

В виде иллюстрации продолжим наш пример. Предположим теперь, что горизонт планирования T охватывает пять периодов. По каждому периоду задана своя величина допустимых затрат. Для сопоставимости новых результатов с предыдущими предположим, что объемы затрат по проектам и допустимые объемы затрат остались в сумме прежними, но распределились теперь по пяти периодам.

Модель в Excel строится из предыдущей введением четырех новых строк, заполнением новыми числовыми данными и протягиванием формульных ячеек столбца L на четыре новые ячейки.

В таблице 2.4 приведен пример такой модели.

Применение процедуры «Поиск решения» дает портфель проектов, приведенный в таблице 2.5.

Как мы видим, портфель существенно изменился. Он состоит теперь из пяти проектов с номерами 2, 4, 5, 9, 10.

По сравнению с предыдущим вариантом из портфеля вышли проекты 6 и 7, а вместо них вошли проекты 2, 4. Общий доход от реализации проектов уменьшился на 230 единиц.

Таблица 2.4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2	**Портфель**											Требуемая сумма	Допустимая сумма
3	Затраты 1-го периода v_{m1}	0	0	0	0	240	0	0	0	0	0	0	300
4	Затраты 2-го периода v_{m2}	0	300	0	100	0	100	0	500	200	0	0	600
5	Затраты 3-го периода v_{m3}	0	300	550	40	0	150	300	300	230	0	0	600
6	Затраты 4-го периода v_{m4}	30	0	100	50	0	100	130	360	150	0	0	250
7	Затраты 5-го периода v_{m5}	20	0	0	0	0	0	130	0	0	135	0	150
8	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**0**	

Таблица 2.5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2	**Портфель**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	Требуемая сумма	Допустимая сумма
3	Затраты 1-го периода v_{m1}	0	0	0	0	240	0	0	0	0	0	240	300
4	Затраты 2-го периода v_{m2}	0	300	0	100	0	100	0	500	200	0	600	600
5	Затраты 3-го периода v_{m3}	0	300	550	40	0	150	300	300	230	0	570	600
6	Затраты 4-го периода v_{m4}	30	0	100	50	0	100	130	360	150	0	200	250
7	Затраты 5-го периода v_{m5}	20	0	0	0	0	0	130	0	0	135	135	150
8	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**690**	

Можно попытаться улучшить портфель, переставляя проекты на другие периоды времени или перераспределяя объемы допустимых затрат.

Рассмотрим сначала возможности перестановки проектов.

Переставим выполнение проекта номер 10 с 5-го периода на 3-й и проведем процедуру оптимизации. В результате портфель изменится, в него теперь войдут 5, 6, 7 и 10 проекты, при этом общий суммарный доход портфеля повысится на 10 единиц (таблица 2.6).

Таблица 2.6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2	**Портфель**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	Требуемая сумма	Допустимая сумма
3	Затраты 1-го периода v_{m1}	0	0	0	0	240	0	0	0	0	0	240	300
4	Затраты 2-го периода v_{m2}	0	300	0	100	0	100	0	500	200	0	100	600
5	Затраты 3-го периода v_{m3}	0	300	550	40	0	150	300	300	230	135	585	600
6	Затраты 4-го периода v_{m4}	30	0	100	50	0	100	130	360	150	0	230	250
7	Затраты 5-го периода v_{m5}	20	0	0	0	0	0	130	0	0	0	130	150
8	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**700**	

Можно и далее изменять расстановку проектов по периодам в попытках увеличить суммарный доход от портфеля. Такая смешанная человеко-машинная процедура позволяет постепенно, шаг за шагом, методом проб и ошибок, сформировать приемлемый или даже оптимальный портфель проектов. Достоинство такой процедуры в том, что в ней наиболее трудоемкую часть, связанную с выбором оптимального портфеля при данной расстановке проектов, берет на себя компьютерная программа. Человек анализирует полученный результат, при желании меняет расстановку и предоставляет дальнейшую оптимизацию программе.

Вмешательство человека позволяет перевести часть общей многошаговой процедуры формирования оптимального портфеля на уровень человеческого анализа, на уровень «здравого смысла», оперативно вносить коррективы и, самое главное, коренным образом сократить масштабную подготовку исходной информации, необходимую при полностью автоматизированной процедуре формирования портфеля.

Модель с логическими связями (Модель 2)

Дополним ***Модель 1*** логическими условиями и ограничениями. Проекты, отбираемые для включения в портфель, могут быть связаны разнообразными логическими связями. Напомним основные виды таких связей.

1. Некоторые проекты могут быть соединены конъюнктивно, союзом «и», то есть в портфель должны быть обязательно включены все проекты заранее заданной группы. В частности, это может относиться и к отдельным проектам, в обязательном порядке включаемым в портфель.

2. Некоторые проекты могут быть соединены дизъюнктивно, союзом «или», то есть в портфель должен быть включен по крайней мере один проект из заранее заданной группы.

3. Некоторые группы проектов могут быть подчинены отрицанию «не», то есть заранее исключены из будущего портфеля. Такие проекты можно сразу устранить из модели.

4. Некоторые проекты могут быть подчинены импликации, то есть могут быть реализованы лишь при определенных условиях. Типичным из таких условий является предварительное выполнение некоторых других проектов.

Предположения Модели 2

1. Финансовые затраты по реализации проектов и доходы от их реализации не зависят от времени, то есть не меняются при переносе проектов на другие периоды времени. Платежи не дисконтируются (ставка дисконтирования q равна 0).

2. Для каждого периода времени t определен допустимый объем затрат Wt на реализацию проектов в данном периоде.

3. Для проектов заранее не известен возможный срок начала.

4. Учитываются логические связи указанных выше типов между проектами, из которых формируется итоговый портфель.

5. Целью формирования портфеля является максимизация суммы дохода от реализации проектов к концу периода T.

Обозначения затрат. В данной модели потребуется наиболее общее формальное описание затрат в виде величины u_{mkt}, обозначающей величину затрат по реализации k-го этапа проекта m, приходящихся на период времени t. Суммарная величина затрат w_t, приходящаяся на период времени t, определяется формулой:

$$w_t = \sum_{k=1}^{t} x_{m,t-k-1} \cdot u_{mkt} \, .$$

Согласно этой формуле суммируются затраты по всем проектам, начинающимся не позднее периода t, с учетом этапа данного проекта (номер этапа k) и периода его выполнения.

Обозначения доходов. В обозначениях доходов d_{mkt} будем опускать индексы k и t и использовать более простое обозначение d_m.

Модель 2 в этих обозначениях имеет вид задачи линейного программирования с булевыми переменными x_{mt}, и системой ограничений в соответствии с допустимыми объемами затрат в каждом периоде времени и допустимым объемом дохода по результатам реализации проектов, входящих в портфель, а именно:

$$\sum_{m=1}^{M} d_m x_m \quad \to \quad \max$$

$$\begin{cases} w_t = \sum_{k=1}^{t} x_{m,t-k-1} \cdot u_{mkt}, & t = 1 \div T \\ w_t \le W_t, & t = 1 \div T \\ x_m = \sum_{t=1}^{T} x_{mt}, & m = 1 \div M \\ x_m \le 1, & m = 1 \div M \\ x_{mt} \in \{0;1\}, \quad m = 1 \div M, \quad t = 1 \div T \ . \end{cases}$$

Эту линейную модель с булевыми переменными следует дополнить ограничениями в соответствии с логическими связями между проектами. Такие ограничения в виде соответствующих систем линейных условий были указаны выше.

Отметим, что связи типа импликации напоминают связи между работами в сетевых моделях управления проектами. Однако имеются принципиальные различия. В ***Модели 2*** заранее задан горизонт планирования, и моделирование направлено на получение максимального дохода за заданное время, а не на сокращение времени реализации проекта. В ***Модели 2*** учитываются логические связи различных типов, не только типа импликации. Все это создает препятствия принципиального характера для использования в реализации модели стандартных программных средств типа MS Project.

Процедурная реализация ***Модели 2***, как и реализация предыдущих моделей, может быть проведена средствами Excel.

В рамках ***Модели 1*** можно пытаться улучшить ситуацию за счет перестановки проектов по периодам времени. Варианты такой перестановки определяются по усмотрению пользователя.

Модель 2 предусматривает автоматический поиск наилучшего варианта. Сначала рассмотрим пример расчета без участия логических связей между проектами. Реализация модели в Excel представлена в таблице 2.7.

Булевым переменным x_{mt}, определяющим период начала выполнения проекта (если он вообще выполняется), соответствуют ячейки таблицы B4:K8. Часть из них отмечена более темным фоном. Это те ячейки, в которых данный проект начаться не может, поскольку в этом случае реализация проекта выйдет за пределы горизонта планирования, соответствующего в нашем примере пяти периодам времени.

Переменным x_m, определяющим вхождение проекта в портфель, соответствуют ячейки B2:K2. В ячейке B2 введена формула суммы по соответствующему столбцу B4:B8 и протянута по всему диапазону B2:K2. Таким образом, во всем этом диапазоне введены однородные формулы. Они соответствуют ограничениям модели, связывающим переменную x_m с суммой переменных x_{mt}.

В диапазоне B10:B14 введены исходные данные по затратам на проведение этапов проектов. Проекты данного примера имеют от одного до трех этапов из пяти возможных, поэтому большинство ячеек остается пустыми.

В диапазоне B16:K20 введены формулы, вычисляющие затраты на реализацию этапа проектов по периодам времени. Эти затраты зависят от того, в каком периоде времени начнется реализация проекта (и начнется ли она вообще). Последнее же определяется по результатам проведения оптимизации, которая, в свою очередь, использует данные ячеек B16:K20. Разорвать этот круг можно, лишь введя в ячейки B16:K20 универсальные формулы, действующие при любом сроке начала реализации проекта.

Таблица 2.7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2	**Портфель**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**		
3	**Период начала выполнения проекта (отмечен 1)**												
4	1 период												
5	2 период												
6	3 период												
7	4 период												
8	5 период												
9	**Затраты по этапам проекта**												
10	Этап 5												
11	Этап 4												
12	Этап 3				50		100	130	360	150			
13	Этап 2	20	300	100	40		150	130	300	230			
14	Этап 1	30	300	550	100	240	100	300	500	200	135		
15	**Распределение затрат по периодам времени**											Требуемая сумма	Допустимая сумма
16	1 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	300
17	2 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	600
18	3 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	600
19	4 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	250
20	5 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	150
21	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**0**	

Приведем такие формулы по столбцу B16:B20.
В ячейке B16 введена формула: =B4*B14.
В ячейке B17 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B4:B5;B13:B14).
В ячейке B18 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B4:B6;B12:B14).
В ячейке B19 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B4:B7;B11:B14).
В ячейке B20 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B4:B8;B10:B14).

Остальные ячейки диапазона C16:K20 имеют аналогичный вид и получаются протягиванием уже заполненного диапазона B16:B20. Указанные формулы полностью соответствуют расчету затрат, приведенному в математической модели.

В ячейках L16:L20 введена сумма ячеек слева. Так, в ячейке L16 находится формула: =СУММ(B16:K16). Она определяет общие суммарные затраты на реализацию проектов пока еще не сформированного портфеля в данном периоде времени. В ячейках M16:M20 введены допустимые суммы затрат по периодам.

В ячейках B21:K22 указаны исходные данные по доходам от реализации проектов и по балльной оценке состояния системы, полученного в результате реализации проекта.

В ячейке L21 ведена формула =СУММПРОИЗВ(B$2:K$2;B21:K21),
определяющая итоговую величину дохода по портфелю.

Таблица заполнена. В поля процедуры «Поиск решения» вводятся:

- целевая ячейка L21,
- изменяемые ячейки B4:K8,
- ограничения:

$B$2:$K$2 <= 1,
$B$4:$K$8 = двоичное,
$B$8:$E$8 <= 0,
$E$7 <= 0,
$G$7:$J$8 <= 0,
$L$16:$L$20 <= $M$16:$M$20,

Все эти данные находятся в полном соответствии с приведенной выше математической записью модели. Результат расчета по процедуре «Поиск решения» приведен в таблице 2.8.

Решение удалось заметно изменить за счет автоматического поиска оптимальной расстановки проектов по периодам времени. Новый портфель содержит проекты 4, 5, 6, 7, 9, 10.

Дополнительно получено 14 единиц в балльной шкале оценок и 80 единиц дохода. Это связано не просто с включением в портфель дополнительного проекта 4, но и с перераспределением по периодам времени всех остальных проектов.

Рассмотрим процедуру ввода логических связей между проектами.

Предположим, что по условиям проведения проект 7 может начаться только после завершения проекта 5. План проектов, определяемый таблицей 2.8, не удовлетворяет этому условию: проект 7 в ней начинается раньше проекта 5.

Таблица 2.8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2	**Портфель**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**		
3	**Период начала выполнения проекта (отмечен 1)**												
4	1 период	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0		
5	2 период	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0		
6	3 период	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1		
7	4 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
8	5 период	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
9	**Затраты по этапам проекта**												
10	Этап 5												
11	Этап 4												
12	Этап 3				50		100	130	360	150			
13	Этап 2	20	300	100	40		150	130	300	230			
14	Этап 1	30	300	550	100	240	100	300	500	200	135		
15	**Распределение затрат по периодам времени**											Требуемая сумма	Допустимая сумма
16	1 период	0	0	0	0	0	0	300	0	0	0	300	300
17	2 период	0	0	0	0	240	0	130	0	200	0	570	600
18	3 период	0	0	0	100	0	0	130	0	230	135	595	600
19	4 период	0	0	0	40	0	0	0	0	150	0	190	250
20	5 период	0	0	0	50	0	100	0	0	0	0	150	150
21	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**1000**	

Введем в ячейках L4:L8 следующие формулы.

В ячейке L4 формулу =H4, а в ячейке L5 формулу =H5-СУММ(F$4:F4), которую дальше можно протянуть по столбцу до L8. В результате в ячейках L6, L7, L8 получим соответственно формулы:

=H6-СУММ(F$4:F5),

=H7-СУММ(F$4:F6),

=H8-СУММ(F$4:F7).

В соответствии с ограничениями математической модели, выражающими логические связи типа импликации, в поле ограничений процедуры «Поиск решения» вводим неравенство $L$4:$L$8 <= 0.

Результат оптимизации представлен в таблице 2.9. Мы видим, что процедура переставила периоды запуска проектов, изменив при этом итоговый портфель.

Следующая модель является развитием ***Модели 2***. В ней, помимо логических связей между проектами, участвуют временные связи, позволяющие частично перераспределять затраты на реализацию проектов.

Модель с логико-финансовыми связями (Модель 3)

Продолжим развитие модели формирования портфеля проектов. Дополним ***Модель 2*** новыми условиями. Эти условия связывают между собой затраты по реализации проектов в различные периоды времени. Они позволяют затраты, не освоенные в одних периодах времени, переносить на последующие периоды. Доходы, получаемые от реализации проектов, можно использовать в той или иной мере для реализации других проектов. При этом стоимостные объемы могут пересчитываться с учетом коэффициента роста (коэффициента дисконтирования).

Посредством P_t обозначим плановый объем затрат на реализацию проектов в периоде времени t. Посредством W_t обозначим доступный объем затрат на реализацию проектов в периоде времени t. Он отличается от планового объема P_t тем, что содержит в себе неосвоенные объемы затрат предшествующих периодов. Посредством Δ_t обозначается неосвоенный объем затрат в периоде времени t, так что $\Delta_t = W_t - w_t$.

В предыдущих моделях плановый объем затрат P_t совпадал с доступным объемом W_t. Во всех периодах времени t выполнялись условия: $W_t = P_t$ и при этом $w_t \le W_t$.

В ***Модели 3*** предполагается возможность использования в данном периоде времени остатков средств предшествующих периодов. Затраты для всех периодов t будут теперь связаны соотношениями:

$w_t \le W_t$, $\qquad$ $\Delta_t = W_t - w_t$, $\qquad$ $W_t = P_t + \Delta_{t-1}(1+q)$.

Посредством q обозначается процентная ставка за один период времени. Она служит для перерасчета стоимостных объемов из периода в период. При обратном перерасчете эта величина используется как ставка дисконтирования.

Таким образом, в каждом периоде t доступные средства W_t связаны с остатками средств предшествующего периода Δ_{t-1}. Для первого периода предшествующий период отсутствует. Мы включим его в общую запись, положив для отсутствующего нулевого периода остатки равными 0, то есть положим $\Delta_0 = 0$.

Таблица 2.9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2	**Портфель**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**		
3	**Период начала выполнения проекта (отмечен 1)**											5 → 7	
4	1 период	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
5	2 период	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	
6	3 период	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
7	4 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
8	5 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
9	**Затраты по этапам проектов**												
10	Этап 5												
11	Этап 4												
12	Этап 3				50		100	130	360	150			
13	Этап 2	20	300	100	40		150	130	300	230			
14	Этап 1	30	300	550	100	240	100	300	500	200	135		
15	**Распределение затрат по периодам времени**											Требуемая сумма	Допустимая сумма
16	1 период	30	0	0	0	0	0	0	0	200	0	230	300
17	2 период	20	0	0	0	240	100	0	0	230	0	590	600
18	3 период	0	0	0	0	0	150	300	0	150	0	600	600
19	4 период	0	0	0	0	0	100	130	0	0	0	230	250
20	5 период	0	0	0	0	0	0	130	0	0	0	130	150
21	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**865**	

Отметим, что при q = 0 рост средств при переходе к следующему периоду не происходит. Остатки средств предыдущего периода просто приплюсовываются при этом к доступным средствам следующего периода.

В отличие от предыдущих моделей, теперь нам потребуются обозначения доходов, содержащие полную информацию. Мы будем использовать полные обозначения доходов d_{mkt}, содержащие информацию о величине дохода d, полученного в периоде времени t на k-м этапе от начала реализации проекта m.

Мы рассмотрим разные варианты модели: без возможности использования полученного дохода для финансирования затрат на проведение проектов в последующие периоды времени и с возможностью использования дохода для такого финансирования.

Доход, полученный в том или ином периоде времени, относится в модели к концу этого периода. Таким образом, использование полученного дохода может начаться не ранее следующего периода.

Доходы, полученные от реализации проектов в периоде времени t, обозначаются посредством c_t и определяются равенством:

$$c_t = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{t} x_{m,t-k+1} \cdot d_{mkt} \,.$$

Это равенство аналогично равенству по затратам на реализацию проектов. В модели учитывается, что объем затрат, требуемых в данном периоде времени, необходимо иметь в начале этого периода, а доходы данного периода времени возникают в конце этого периода и могут быть использованы только в следующем периоде времени.

Эти доходы, выделенные в периоде времени t для финансирования затрат в следующем периоде времени t+1, обозначаются в модели посредством δ_t. Оставшаяся часть доходов переходит на следующий период с ростом по процентной ставке q за период времени. Соответствующее балансовое уравнение, сопровождаемое необходимыми дополнительными условиями, вводится в модель в следующей форме:

$$C_t = C_{t-1} \cdot (1+q) + c_t - \delta_t, \qquad t = 2 \div T$$

$$C_1 = c_1,$$

$$C_t \geq 0. \qquad t = 1 \div T$$

Посредством C_t обозначается накопленная сумма доходов на период времени t.

Согласно сформулированным условиям, в первом периоде накопленная сумма доходов C_1 равна доходам c_1, полученным в этом периоде. Далее в произвольном периоде t величина C_t складывается из суммы предыдущего периода C_{t-1}, увеличенной в соответствии с процентной ставкой q (слагаемое $C_{t-1}(1+q)$), а также доходов c_t данного периода. Из этой суммы вычитается величина δ_t, выделенная для использования в составе затрат на финансирование проектов следующего периода.

Неравенство $C_t \geq 0$ обеспечивает выполнение условия, что затраты δ_t черпаются из суммы доходов, накопленных к этому периоду времени.

Затраты δ_T, выделенные для использования в промежутке времени за пределами горизонта планирования, в модели можно положить равными 0 или другой наперед заданной величине.

В общем случае, если δ_t для всех t положить в модели равными 0, то это закроет возможность финансирования проектов из получаемых доходов. Если же на величину δ_t не накладывать такого рода ограничений, то оптимизация портфеля проектов будет производиться при допущении финансирования проектов из получаемых доходов.

Мы рассмотрим обе возможности.

Общая сумма доходов, полученных от реализации всего портфеля проектов на последний период времени T, равна C_T. Однако доходы от проектов могут возникать и в последующие периоды. Все будущие доходы, прогнозируемые за пределами горизонта планирования T, пересчитываются путем дисконтирования к периоду T. В качестве ставки дисконтирования при этом применяется прежняя ставка q.

Результат дисконтирования суммы будущих доходов от проектов, входящих в портфель, к периоду времени T обозначим посредством A_T.

Величина A_T определяется формулой:

$$A_T = \sum_{t=T+1}^{\infty} c_t \cdot (1+q)^{-(t-T)}.$$

Модель 3 в этих обозначениях имеет представленный ниже вид.

Перед нами задача линейного программирования с булевыми переменными x_{mt} и вещественными неотрицательными переменными δ_t, и системой ограничений в соответствии с допустимыми объемами затрат в каждом периоде времени и допустимым объемом дохода по результатам реализации проектов, входящих в портфель.

Эту линейную модель с булевыми переменными следует при необходимости дополнить ограничениями в соответствии с логическими связями между проектами. Построение таких ограничений было описано выше.

Варианты расчета в соответствии с новой моделью представлены в таблицах 2.10 и 2.11.

Рассмотрим таблицу 2.10 и изменения, которые внесены в нее по отношению к предыдущему варианту – таблице 2.9.

В ячейку N14 введена величина ставки в процентном формате. Рассмотрим диапазон ячеек L16:O20.

В ячейках O16:O20 введены числа, характеризующие, как и прежде, плановые объемы затрат. Ячейка N16 оставлена пустой (остаток средств отсутствующего периода времени). В ячейке M16 введена формула =O16, утверждающая равенство планируемой и допустимой сумм для начального периода.

Модель 3

$$C_T + A_T \to \max$$

$$\begin{cases}
w_t = \sum\limits_{m=1}^{M} \sum\limits_{k=1}^{t} x_{m,t-k+1} \cdot u_{mkt}, & t = 1 \div T \\
w_t \le W_t, & t = 1 \div T \\
\Delta_t = W_t - w_t, & t = 1 \div T \\
W_t = P_t + \Delta_{t-1} \cdot (1+q) + \delta_{t-1}, & t = 2 \div T \\
c_t = \sum\limits_{m=1}^{M} \sum\limits_{k=1}^{t} x_{m,t-k+1} \cdot d_{mkt}, & t = 1 \div T \\
C_t = C_{t-1} \cdot (1+q) + c_t - \delta_t, & t = 2 \div T \\
C_1 = c_1, & \\
C_t \ge 0, & t = 1 \div T \\
A_T = \sum\limits_{t=T+1}^{\infty} c_t \cdot (1+q)^{-(t-T)}, & \\
x_m = \sum\limits_{t=1}^{T} x_{mt}, & m = 1 \div M \\
x_m \le 1, & m = 1 \div M \\
x_{mt} \in \{0;1\}, & m = 1 \div M, \quad t = 1 \div T \\
\delta_t \ge 0. & t = 1 \div T - 1
\end{cases}$$

В ячейке M17 введена формула =O17+N17*(1+$N$14)+AC16, определяющая допустимую сумму данного периода через планируемую сумму данного периода (ячейка O17), остаток средств предыдущего периода (ячейка N17), выросший к данному периоду в соответствии с процентной ставкой (ставка в ячейке N14), и величину доходов предыдущего периода, выделенную для финансирования затрат (ячейка AC16).

Эта формула протянута вниз по столбцу M17:M20.

В ячейке N17 введена разность допустимой и требуемой суммы по предыдущему периоду, то есть формула =M16-L16. Эта формула протянута вниз по столбцу N17:N20.

В ячейках L16:L20 формулы остаются прежними. Так, в L16 находится формула =СУММ(B16:K16). Ее можно протянуть вниз по L16:L20.

Таблица 2.10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
2	**Портфель**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**				
3	**Период начала выполнения проекта (отмечен 1)**											5 → 7			
4	1 период											0			
5	2 период											0			
6	3 период											0			
7	4 период											0			
8	5 период											0			
9	**Затраты по этапам проектов**														
10	Этап 5														
11	Этап 4														
12	Этап 3				50		100	130	360	150					
13	Этап 2	20	300	100	40		150	130	300	230					
14	Этап 1	30	300	550	100	240	100	300	500	200	135		Проц. ставка	0%	
15	**Распределение затрат по периодам времени**											Требуемая сумма	Допустимая сумма	Остаток предыд. периода	Планируемая сумма
16	1 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	300		300
17	2 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	900	300	600
18	3 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1500	900	600
19	4 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1750	1500	250
20	5 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1900	1750	150
21	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**0**			

В ячейках O16:O20 числовые данные по планируемым суммам затрат также можно оставить прежними.

Больше никаких изменений в таблицу 2.10 вносить не требуется.

Рассмотрим таблицу 2.11. Это новая таблица. Она связана с расчетом доходов. Таблица содержит два больших блока.

Первый блок, «Доходы после завершения проектов», содержит числовую информацию о распределении доходов. Для каждого проекта в ней указаны доходы по периодам времени.

Для разных проектов ситуация в примере предполагается различной. Продолжительность получения доходов для разных проектов охватывает от одного до четырех периодов. По одним проектам величина дохода сохраняется из периода в период. По другим она постепенно уменьшается – эффект от реализации проекта, выраженный величиной дохода, постепенно падает. По третьим величина дохода постепенно растет – требуется время, чтобы эффект проявился в полную силу.

Таблица 2.11

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
9	**Доходы после завершения проектов**													
10	Этап 5		30		30		100	100		100	15			
11	Этап 4		70	70	50	60	110	200	350	120	15			
12	Этап 3	5	100	140		40					15			
13	Этап 2					30					15			
14	Этап 1													
15	**Распределение доходов по периодам времени**											Сумм. доход	Финанс. затрат	Накопл. доход
16	1 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	2 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	3 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	4 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	5 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		**0**
21	6 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
22	7 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
23	8 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
24	9 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

Для всех проектов суммарный доход сохраняется прежним, как и в предыдущих примерах.

Второй блок, «Распределение доходов по периодам времени», заполнен формулами, совершенно аналогичными тем, которые введены в уже существующем блоке «Распределение затрат по периодам времени».

А именно, в ячейке R16 введена формула: =B4*R14.

В ячейке R17 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B4:B5;R13:R14).

В ячейке R18 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B4:B6;R12:R14).

В ячейке R19 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B4:B7;R11:R14).

В ячейке R20 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B4:B8;R10:R14).

В ячейке R21 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B5:B8;R10:R13).

В ячейке R22 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B6:B8;R10:R12).

В ячейке R23 введена формула: =СУММПРОИЗВ(B7:B8;R10:R11).

Наконец, в ячейке R24 введена формула: =B8*R10.

Затем все эти формулы протянуты направо, на диапазон R16:AA24.

В столбце «Сумм. доход» введены суммы доходов по соответствующим строкам. А именно: в ячейке AB16 введена формула: =СУММ(R16:AA16), которая затем протянута по столбцу вниз. В этом столбце рассчитывается суммарный доход c_t, получаемый в данном периоде времени от реализации проектов.

Столбец «Финанс. затрат» содержит данные по величине дохода, направляемого в данном периоде времени для финансирования затрат следующего периода времени. Ячейки этого столбца соответствуют переменным δ_t модели. Сначала они являются пустыми. Величины в этих ячейках определятся в результате проведения процедуры оптимизации.

Поскольку в нашем примере горизонт планирования охватывает пять периодов времени, реально в расчетах будут участвовать лишь четыре ячейки AC16:AC19. Они помечены серым фоном. Ссылки на эти ячейки участвуют в формулах, содержащихся в ячейках M17:M20, что было указано выше при описании содержимого данных ячеек.

Столбец «Накопл. доход» содержит данные по общей накапливающейся величине дохода от реализации портфеля проектов, за вычетом объемов, направляемых на финансирование затрат. Накопление дохода рассчитывается путем суммирования из периода в период с учетом роста по процентной ставке. К доходу, приходящемуся на последний, пятый период горизонта планирования (ячейка AD20), присоединена дисконтированная сумма доходов будущих периодов. В качестве ставки дисконтирования используется та же процентная ставка ячейки N14.

В ячейки столбца «Накопл. доход» введены следующие формулы.

В ячейку AD16 введена формула =AB16-AC16, относящая к начальной величине накопленного дохода разность между доходом первого периода и его частью, выделенной для финансирования затрат.

Ячейка AD17 содержит формулу =AB17-AC17+AD16*(1+$N$14), дополнительно учитывающую рост предыдущей суммы по заданной процентной ставке.

Эту формулу можно протянуть вниз до ячейки AD19. В ячейку последнего периода AD20 введена модифицированная формула

=AB20-AC20+AD19*(1+$N$14)+AB21*(1+$N$14)^-1+
AB22*(1+$N$14)^-2+AB23*(1+$N$14)^-3+AB24*(1+$N$14)^-4,

дополнительно учитывающая будущие доходы в дисконтированной форме.

В математической модели содержимое ячейки AD20 соответствует сумме $C_T + A_T$. Это целевая ячейка.

Данные ячеек B21:L21 в нашем новом варианте становятся излишними. Их можно безболезненно устранить, но мы их сохраним в таблице как справочный материал, дающий возможность дополнительного сопоставления результатов по новой модели и по предыдущим моделям.

В поля процедуры «Поиск решения» внесем небольшие изменения.

А именно: в поле «Изменяемые ячейки» добавим ячейки AC16:AC19, указав в ограничениях их неотрицательность.

Кроме того, добавим в ограничения условие неотрицательности ячеек AD16:AD20.

Больше никаких изменений вносить не требуется. Модель готова к расчетам. Мы представим серию расчетов для различных вариантов.

Во-первых, рассмотрим вариант модели, в котором все δ_t равны 0, то есть в котором доходы, полученные по ходу реализации проектов, не используются для финансирования проектов в последующие промежутки времени. Для этого достаточно в поле Ограничений процедуры «Поиск решения» ввести дополнительное ограничение: $AC$16:$AC$19 = 0.

Это ограничение обнуляет отчисления на финансирование проектов из доходов. Если в дальнейшем потребуется ограничить финансирование как-то по-другому, то следует ввести соответствующее ограничение в поле процедуры «Поиск решения».

Сначала выберем ставку роста q, равную 0%, то есть введем число 0 в ячейку N14. Это означает, что неосвоенные средства предшествующего периода просто прибавляются к средствам текущего периода.

Результаты проведенных расчетов представлены в таблицах 2.12 и 2.13.

Модель 3 является в наших условиях менее жесткой, чем ***Модель 2***, поскольку дополнительно позволяет перераспределять затраты. Следует ожидать, что результаты получатся не хуже, чем в предыдущей модели. И действительно, сравнение результатов (таблицы 2.10 и 2.13) показывает, что оптимизационная процедура улучшила портфель.

Изменим ставку с 0 на 5% и проведем оптимизацию в новых условиях. Результат расчета представлен в таблицах 2.14–2.15.

Портфель изменился снова, увеличилась и сумма доходов. Отметим, что доходы, вычисляемые с учетом роста финансовых сумм (ячейка AD20) и без учета такого роста (ячейка L21), теперь разошлись.

Для применения варианта модели, в котором допускается финансирование затрат из доходов, получаемых от реализованных проектов, следует в поле Ограничения процедуры «Поиск решения» устранить временно введенное условие $AC$16:$AC19 = 0.

Это соответствует приведенному выше общему виду ***Модели 3***, с переменными δ_t, не равными 0.

Таблица 2.12

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
2	**Портфель**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**				
3	**Период начала выполнения проекта (отмечен 1)**											5 → 7			
4	1 период	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0			
5	2 период	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0			
6	3 период	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0			
7	4 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1			
8	5 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1			
9	**Затраты по этапам проектов**														
10	Этап 5														
11	Этап 4														
12	Этап 3				50		100	130	360	150					
13	Этап 2	20	300	100	40		150	130	300	230					
14	Этап 1	30	300	550	100	240	100	300	500	200	135		Проц. ставка	0%	
15	**Распределение затрат по периодам времени**											Требуемая сумма	Допустимая сумма	Остаток предыд. периода	Планируемая сумма
16	1 период	0	0	0	0	0	0	0	0	200	0	200	300		300
17	2 период	0	0	0	0	240	100	0	0	230	0	570	700	100	600
18	3 период	0	0	0	0	0	150	300	0	150	0	600	730	130	600
19	4 период	0	0	0	0	0	100	130	0	0	0	230	380	130	250
20	5 период	0	0	0	0	0	0	130	0	0	135	265	300	150	150
21	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**920**			

Таблица 2.13

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
9	**Доходы после завершения проектов**													
10	Этап 5		30		30		100	100		100	15			
11	Этап 4		70	70	50	60	110	200	350	120	15			
12	Этап 3	5	100	140		40					15			
13	Этап 2					30					15			
14	Этап 1													
15	**Распределение доходов по периодам времени**											Сумм. доход	Финанс. затрат	Накопл. доход
16	1 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	2 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	3 период	0	0	0	0	30	0	0	0	0	0	30	0	30
19	4 период	0	0	0	0	40	0	0	0	120	0	160	0	190
20	5 период	0	0	0	0	60	110	0	0	100	0	270		**920**
21	6 период	0	0	0	0	0	100	200	0	0	15	315		
22	7 период	0	0	0	0	0	0	100	0	0	15	115		
23	8 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	15		
24	9 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	15		

Таблица 2.14

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Номер проекта m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
2	**Портфель**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**				
3	**Период начала выполнения проекта (отмечен 1)**											5 → 7			
4	1 период	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0			
5	2 период	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0			
6	3 период	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1			
7	4 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1			
8	5 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1			
9	**Затраты по этапам проектов**														
10	Этап 5														
11	Этап 4														
12	Этап 3				50		100	130	360	150					
13	Этап 2	20	300	100	40		150	130	300	230					
14	Этап 1	30	300	550	100	240	100	300	500	200	135		Проц. ставка	5%	
15	**Распределение затрат по периодам времени**											Требуемая сумма	Допустимая сумма	Остаток предыд. периода	Планируемая сумма
16	1 период	0	0	0	0	240	0	0	0	0	0	240	300		300
17	2 период	0	0	0	100	0	100	300	0	0	0	500	663	60	600
18	3 период	0	0	0	40	0	150	130	0	200	0	520	771	163	600
19	4 период	0	0	0	50	0	100	130	0	230	0	510	514	251	250
20	5 период	0	0	0	0	0	0	0	0	150	0	150	154	4	150
21	Доход d_m	5	200	210	80	130	210	300	350	220	60	**940**			

Таблица 2.15

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
9	Доходы после завершения проектов													
10	Этап 5		30		30		100	100		100	15			
11	Этап 4		70	70	50	60	110	200	350	120	15			
12	Этап 3	5	100	140		40					15			
13	Этап 2					30					15			
14	Этап 1													
15	Распределение доходов по периодам времени											Сумм. доход	Финанс. затрат	Накопл. доход
16	1 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	2 период	0	0	0	0	30	0	0	0	0	0	30	0	30
18	3 период	0	0	0	0	40	0	0	0	0	0	40	0	71
19	4 период	0	0	0	0	60	0	0	0	0	0	60	0	135
20	5 период	0	0	0	50	0	110	200	0	0	0	360		**926**
21	6 период	0	0	0	30	0	100	100	0	120	0	350		
22	7 период	0	0	0	0	0	0	0	0	100	0	100		
23	8 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
24	9 период	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

Задания 2.2

1. В таблице 2.6 переместите срок начала реализации проекта 1 на три периода назад и проведите оптимизацию.

Как изменился портфель и величина дохода? Можно ли дополнительно увеличить доход, изменяя срок начала реализации данного проекта? Можно ли увеличить доход, изменяя срок начала реализации какого-нибудь другого проекта?

Можно ли увеличить доход, изменяя срок начала реализации сразу нескольких проектов? Какова при этом максимальная величина дохода?

2. Рассмотрим возможности, связанные не с перестановкой сроков выполнения проектов, а с перераспределением объемов допустимых затрат. Наибольшие возможности здесь дает полное перераспределение затрат по периодам времени в рамках общей заданной суммы.

Постройте соответствующую математическую модель в виде задачи линейного программирования с булевыми переменными.

Перестройте таблицу 2.4 для проведения оптимизационных расчетов в соответствии с этой моделью.

Проведите расчеты в условиях, когда общие затраты равны 1900.

Сравните результаты таблиц 2.3 и 2.4. Изменится ли портфель при изменении сроков выполнения проектов?

Сформулируйте выводы по полученным результатам.

3. В таблице 2.9 проект 9 начинается до проекта 7. Потребуем, чтобы проект 9 мог начинаться только после окончания проекта 7. Внесите соответствующие изменения в модель, в таблицу 2.9 и в ограничения процедуры «Поиск решения». Проведите оптимизацию.

Как изменился портфель и величина дохода?

4. Примените вариант модели с возможностью финансирования затрат из доходов. Проведите оптимизацию при ставках, равных 0%, 5%, 10%, 15%. Как изменяются портфель и целевая величина доходов?

5. Удалите из модели логическую связь (проект 7 начинается после проекта 5). Проведите оптимизацию при ставках, равных 0%, 5%, 10%, 15%, как для варианта без финансирования затрат из доходов, так и для варианта с возможностью такого финансирования.

Как изменяются портфель и целевая величина доходов?

6. С ростом ставки возможности финансирования проектов улучшаются. Можно ожидать, что при достаточно большой ставке все проекты войдут в портфель. Определите минимальную величину такой ставки.

Раздел 3. Модели управления запасами

Стратегия управления запасами

Проблемы управления запасами возникают на предприятии в самых различных ситуациях. Это могут быть запасы готовой продукции, производимой предприятием. Это могут быть запасы исходного сырья и материалов, инструментов и запчастей. На предприятии возникают и внутренние запасы полуфабрикатов, производимых данным предприятием и используемых здесь же. Все эти различные виды запасов, возникающие по разным причинам в различных многообразных ситуациях, объединяет общая проблематика. Как организовать процесс принятия управленческих решений таким образом, чтобы не возникало перебоев в снабжении товарами? Как при этом добиться минимизации издержек, связанных с запасами? Другими словами, как управлять запасами?

Возникающие здесь ситуации достаточно многообразны, и мы не получим единого рецепта, пригодного во всех случаях. Однако мы сформируем общий подход к решению возникающих здесь проблем. Этот подход позволит разобраться в сплетении различных факторов, влияющих на ситуацию, построить ее модель в аналитической или имитационной форме, получить расчетные материалы для анализа и принятия решений по оптимизации запасов.

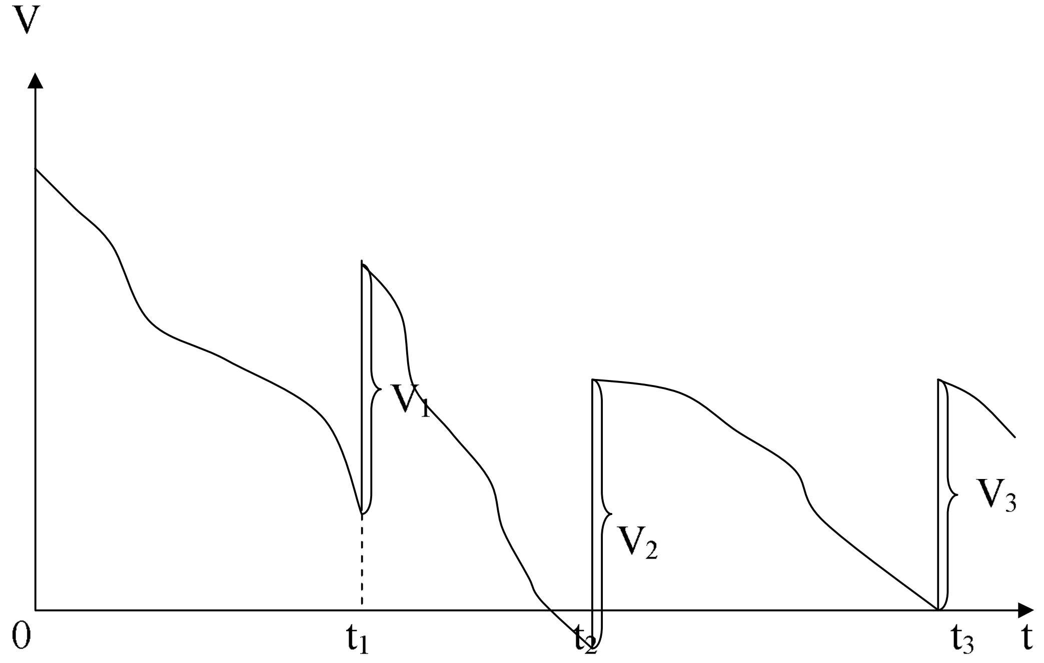


Рис. 3.1. Типичная динамика запасов

На рис. 3.1 представлена типичная картина динамики складских запасов, график изменения их объема во времени. Объем запасов постепенно убывает в соответствии со спросом. В некоторые моменты времени (на графике это моменты t_1, t_2, t_3) на склад поступают поставки (объема V_1, V_2, V_3). Размер поставки соответствует длине вертикального отрезка. Запас вырастает на величину поставки.

Поставка в момент t_1 поступила, когда на складе еще оставались запасы. Поставка в момент t_2 пришла в ситуации дефицита (запасы отрицательны, у склада имеется задолженность перед спросом, удовлетворяемая из пришедшей поставки). Поставка в момент t_3 застала ситуацию, когда запасы как раз исчерпались.

Размеры поставок могут быть различными, сами поставки могут поступать на склад нерегулярно.

Формируя стратегию управления запасами, мы, в общем случае, стремимся управлять дискретными поставками, стремясь приспособиться к неуправляемому, но прогнозируемому спросу.

Стратегия управления запасами – это последовательность решений, определяющих моменты поставок и их объемы. Таким образом, стратегия отвечает на два вопроса: *Когда?* и *Сколько?*

Качество стратегии управления запасами характеризуется издержками. Стратегия эффективна, когда издержки минимальны.

Издержки связаны с поставками и хранением запасов, а также с дефицитом. Рассмотрим работу системы в отсутствие дефицита.

Издержки по поставкам подразделяются на постоянную и переменную составляющую.

Постоянные издержки по поставкам – это издержки, не зависящие от размеров поставки. К ним относятся организация заказа, телефонные переговоры, командировочные и частично транспортные расходы и т.д. Такие издержки, в расчете на единицу времени, будут большими, если поставки организуются часто (вне зависимости от их объемов), и малыми, если поставки происходят редко. Эти издержки зависят от принимаемых решений, релевантны разрабатываемой стратегии. Они должны быть включены в анализ разрабатываемой стратегии управления запасами.

Обозначим такие затраты посредством **a**.

Переменные издержки по поставкам – это затраты на закупку товара, страховые и таможенные сборы, исчисляемые как процент от стоимости товара и другие издержки такого рода. Рассмотрим длительный промежуток времени. В условиях бездефицитной работы система должна покрыть весь объем спроса за это время. Объем спроса не зависит решений по поставкам, от того, большими или малыми партиями, редко или часто будет пополняться запас. А переменные издержки по поставкам определяются объемом спроса. Таким образом, они иррелевантны разрабатываемой стратегии управления запасами, и по этой причине их можно вынести за рамки анализа при разработке решений по поставкам.

Издержки по хранению также подразделяются на постоянную и переменную составляющую.

Постоянные издержки по хранению – это издержки, не зависящие от объемов хранимого запаса. Они связаны, в первую очередь, с арендой складских площадей, оплатой работы персонала, оплатой коммунальных услуг, охраны помещений. Такие издержки не меняются при изменении решений по поставкам, не зависят от этих решений. Они иррелевантны разрабатываемой стратегии управления запасами, и по этой причине их можно устранить из дальнейшего анализа.

Переменные издержки по хранению – это издержки, зависящие от объемов хранимого запаса. Они пропорциональны размерам запаса и срокам хранения. Сюда попадают упущенная выгода от замораживания оборотных средств, страховка запаса, оплата работ по предпродажной подготовке, перефасовке товара и т.д. Это релевантные издержки.

Затраты по хранению единицы продукции в течение единицы времени обозначим посредством **b**. Традиционно эта величина выражается как определенный процент i от цены (стоимости единицы) запаса c:

$$b = ic.$$

Дефицит связан с многообразными потерями – потерей не только текущей выгоды, но и будущих возможностей, упущенными клиентами, потерей перспективы. Мы начнем изучение предположения о недопустимости дефицита, затем перейдем к моделированию более сложных ситуаций, когда дефицит допускается, но за него приходится платить.

Таким образом, в дальнейшем анализе участвуют две величины: величина **a** постоянных затрат по поставкам и величина **b** – коэффициент переменных затрат по хранению.

Отметим, что в анализ включаются только затраты, зависящие от решений по поставкам. Затраты, иррелевантные таким решениям, не зависящие от них, в анализ не включаются.

Например, размер арендуемых складских площадей обычно не поддается подгонке под объем хранимого запаса, поэтому арендная плата не войдет в оптимизационные расчеты. Затраты по стоимости товара определяются спросом и тоже непосредственно не входят в оптимизационные расчеты. Однако если размер площадей можно регулировать, то это следует учитывать в составе переменных затрат. Если стоимость партии не пропорциональна ее размеру (например, в связи с оптовой скидкой) или если цена изменяется во времени (например, цена сельскохозяйственной продукции), то это также следует включить в оптимизационные расчеты.

В качестве критерия оптимальности рассматриваются средние издержки за единицу времени. Эту величину следует минимизировать.

Если за время t возникло n поставок, то общие издержки за это время составят величину R:

$$R(t) = a \times n(t) + b \times \int_0^t V(x)dx.$$

Средние издержки за единицу времени составят величину M(t):

$$M(t) = \frac{R(t)}{t}.$$

Оптимизируемая величина не должна зависеть от выбора того или иного конкретного отрезка времени t, поэтому в качестве критерия рассматривается величина L:

$$L = \lim_{t \to \infty} M(t).$$

Модели одного товара

Простейшая модель и формулы Уилсона

Начнем с простейшей модели, предполагающей отсутствие неопределенностей. Мы увидим далее, что эта модель лежит в основе других, существенно более сложных и развитых моделей управления запасами.

Продукция поступает на склад, хранится там и уходит со склада в соответствии со спросом. В простейшей модели все полностью прогнозируемо, интенсивность спроса известна и постоянна. Обозначим ее посредством α. Таким образом, в единицу времени со склада уходит α единиц продукции.

Запас на складе пополняется периодически и одинаковыми поставками (партиями). Пусть T – период времени между поставками (длина цикла), Q – размер партии. Типичная динамика величины складского запаса V во времени представлена на рис. 3.2.

Дефицит (неудовлетворенный спрос) в простейшей модели рассматривается как явление недопустимое.

Слишком ранний приход поставки, когда запас еще имеется, не выгоден, поскольку приходится хранить лишний запас (и раньше времени оплачивать поставку).

Поскольку неопределенность отсутствует, то все можно спрогнозировать и рассчитать. Очередная партия должна приходить в момент, когда запас на складе опускается в точности до 0. В момент поставки размер запаса поднимается вверх на величину поставки Q и затем расходуется с постоянной интенсивностью α. Величина α определяет угол наклона прямых на графике. Поскольку интенсивность постоянна, то наклонные прямые параллельны.

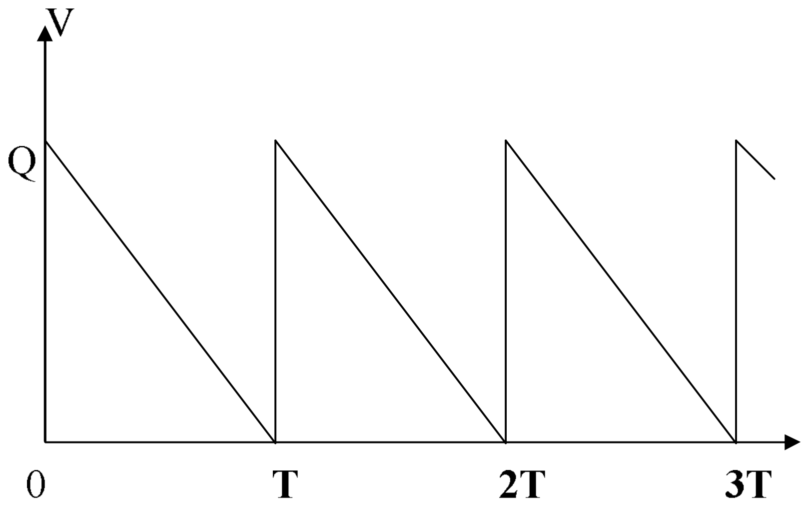


Рис. 3.2. Динамика складского запаса в простейшей модели

Размер партии и длина цикла связаны соотношением:

$$Q = \alpha T.$$

Можно пополнять запас большими партиями через длинные промежутки времени, а можно – малыми партиями и через короткие промежутки. Задача в том, чтобы определить оптимальный размер партии (и, соответственно, оптимальную длину цикла).

Рассмотрим средние затраты в единицу времени. Поскольку ситуация циклически повторяется, то оптимизационные расчеты достаточно провести для одного цикла. На промежутке времени T постоянная составляющая затрат равна a (одна поставка), переменная составляющая затрат равна $0{,}5 \times Q \times T \times b$ (площадь треугольника, умноженная на коэффициент b). Общие затраты на промежутке T равны сумме этих двух составляющих, а средние затраты L в единицу времени определяются формулой:

$$L = \frac{a + 0{,}5QTb}{T} = \frac{a + 0{,}5b\alpha T^2}{T} = \frac{a}{T} + 0{,}5b\alpha T.$$

Полученное выражение содержит сумму двух слагаемых. Первое слагаемое, a / T, определяется постоянной составляющей затрат и представляет собой обратно пропорциональную зависимость от T. Второе слагаемое, $0{,}5b\alpha T$, определяется переменной составляющей затрат и представляет собой прямо пропорциональную зависимость от T.

При коротких циклах T (частые поставки небольшими партиями) затраты будут значительными за счет первого слагаемого. При длинных циклах T (редкие поставки крупными партиями) – за счет второго. Сумма этих слагаемых достигает минимума при некоторой промежуточной длине цикла T* (рис. 3.3).

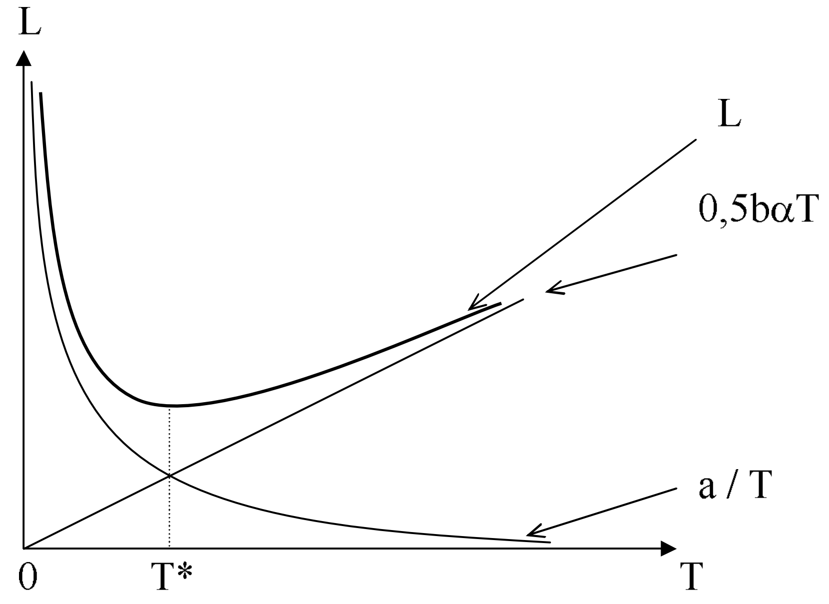


Рис. 3.3. Графики затрат

Для того чтобы рассчитать оптимальный цикл T*, достаточно продифференцировать полученное выражение для затрат L и приравнять производную нулю. Получим:

$$L' = -\frac{a}{T^2} + 0{,}5b\alpha = 0\,.$$

Отсюда

$$T = \pm\sqrt{\frac{2a}{b\alpha}}\,.$$

Поскольку отрицательное значение T смысла не имеет, в качестве оптимальной длины цикла T* получаем единственную величину:

$$T^* = \sqrt{\frac{2a}{b\alpha}}\,.$$

Вспомним, что размер партии и длина цикла связаны соотношением $Q = \alpha T$. Отсюда для оптимального размера партии Q* получаем:

$$Q^* = \alpha T^* = \alpha\sqrt{\frac{2a}{b\alpha}} = \sqrt{\frac{2a\alpha}{b}}\,.$$

Оптимальный размер партии в этих условиях называется также ***экономичным объемом заказа*** (*economic order quantity* – EOQ).

Для получения минимальных средних затрат в единицу времени L* следует подставить T* в указанную выше формулу для L. В результате получим:

$$L^* = \frac{a}{T^*} + 0{,}5b\alpha T^* = \frac{a}{\sqrt{\frac{2a}{b\alpha}}} + 0{,}5b\alpha\sqrt{\frac{2a}{b\alpha}} = \frac{\sqrt{2ab\alpha}}{2} + \frac{\sqrt{2ab\alpha}}{2} = \sqrt{2ab\alpha}\,.$$

Отметим, что два слагаемых, соответствующих постоянной и переменной составляющей затрат, оказались равны друг другу (это отчетливо проявляется на предпоследнем шаге преобразований). Таким образом, минимум затрат соответствует балансу постоянной и переменной составляющей. На рис. 3.3 точка минимума общих затрат лежит прямо над точкой пересечения линий постоянных и переменных затрат.

Полученные формулы для T*, Q*, L* называются ***формулами Уилсона*** (*Wilson*). Они действительны для простейшей модели, соответствующей весьма жестким предположениям. Однако формулы для других, сложных моделей, гораздо более приближенных к реальности, обычно оказываются модификациями формул Уилсона. В этом смысле формулы Уилсона имеют базовый характер.

Величина L не включает непосредственно затраты, связанные со стоимостью товара. Для обеспечения спроса в единицу времени требуется α единиц товара. Пусть товар покупается по цене с. Тогда затраты по стоимости товара равны $c\alpha$. Обозначим посредством $\bar{L}$ средние издержки в единицу времени с учетом стоимости партии. Тогда:

$$\bar{L} = L + c\alpha.$$

При реализации оптимальной стратегии получаем:

$$\bar{L}^* = L^* + c\alpha.$$

Поставка партии на склад требует определенного времени. Поэтому заказ на поставку подается с упреждением. Обозначим ***срок поставки*** (***период упреждения***) посредством τ. В зависимости от конкретных условий он может измеряться минутами, часами, днями, неделями.

Для того чтобы заказанная партия поступила точно в требуемый момент, заказ следует подавать заранее, за время τ до этого момента. Предположим, что срок выполнения заказа τ меньше длины цикла T. В момент поступления объем запаса должен быть равен 0. Следовательно, в момент подачи заказа объем запаса на складе должен составлять величину K, определяемую формулой:

$$K = \tau \times \alpha.$$

Эта величина K называется ***критическим объемом*** (или ***критическим уровнем***) запаса.

В общем случае, когда срок поставки τ может оказаться как меньше, так и больше длины цикла T, критический уровень запаса рассчитывается по формуле:

$$K = \tau' \times \alpha,$$

где

$$\tau' = \tau - T \times \text{ЦЕЛОЕ}(\tau / T).$$

Пример 3.1. Торговые запасы

Предположим, что магазин продает в среднем 10 ящиков пива в день, затраты на доставку партии пива в магазин составляют 50 руб., затраты на хранение пива оцениваются в 10 коп. за ящик в день. Требуется рассчитать оптимальный размер и периодичность поставки.

Согласно формулам Уилсона оптимальный размер партии Q* будет равен:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2a\alpha}{b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 10}{0{,}1}} = 100 \text{ (ящиков).}$$

Длина цикла (периодичность поставок) T* определяется равенством:

$$T^* = \sqrt{\frac{2a}{b\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{0{,}1 \cdot 10}} = 10 \text{ (дней).}$$

Впрочем, ее можно сосчитать и по-другому:

$$T^* = \frac{Q^*}{\alpha} = \frac{100}{10} = 10 \text{ (дней).}$$

Минимальные средние ежедневные затраты по управлению запасами равны:

$$L^* = \sqrt{2ab\alpha} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 0{,}1 \cdot 10} = 10 \text{ (руб. в день).}$$

В течение 10-дневного цикла затраты составят 10×10 = 100 руб., из которых ровно половина уходит на поставку, а другая половина – на хранение.

Оптимальные затраты $\bar{L}^*$, учитывающие стоимость пива, определяются величиной L* и закупочной ценой пива. Например, при закупочной цене 120 руб. за ящик, получим:

$$\bar{L}^* = L^* + c\alpha = 10 + 120 \cdot 10 = 1210 \text{ (руб.).}$$

Отметим, что добавочный член $c\alpha$ не связан с оптимизацией затрат по управлению запасами.

Предположим, что срок поставки пива в магазин составляет 2 дня. Тогда заказ на поставку в наших условиях следует подавать за 2 дня до исчерпания запасов пива в магазине, то есть тогда, когда текущий уровень запаса достигнет критической величины K = 20 ящиков.

Следующие три модели управления запасами являются развитием простейшей модели. Оптимизационные формулы для них выводятся аналогичным способом.

Пример 3.2. Производственные запасы

Вернемся к рассмотренной выше конкретной ситуации с производством печенья и бисквитов. Напомним, что после четвертого периода работа фирмы стабилизируется, производственный спрос на используемое сырье становится устойчивым. Появляется возможность оптимизировать поставки сырья.

Затраты по поставке составляют 1000 руб. независимо от вида сырья и размера партии. Хранение обходится в 0,35 руб. за 1 кг сырья за период. Интенсивность производственного потребления в установившемся режиме работы для различных видов сырья различна и составляет за период:

1500 кг по муке, 700 кг по маслу, 1360 кг по яйцу, 900 кг по сахару.

Оптимальные характеристики поставок могут быть рассчитаны на основе этой информации по формулам Уилсона. Оптимальные размеры партии Q* оказываются равны:

2928 кг по муке, 2000 кг по маслу, 2788 кг по яйцу, 2268 кг по сахару.

Оптимальная периодичность закупок Т* составляет:

2,0 нед. по муке, 2,9 нед. по маслу, 2,0 нед. по яйцу, 2,5 нед. по сахару. Таким образом, периодичность поставок по разным видам ресурсов различна.

Минимальные средние затраты L* по управлению запасами за неделю равны:

1025 руб. по муке, 700 руб. по маслу, 976 руб. по яйцу, 794 руб. по сахару.

Суммарные затраты составляют 3494 руб. в неделю. Это на 1286 руб. (на 27%) меньше, чем аналогичные затраты при еженедельных поставках, составляющие 4781 руб.

Задание 3.1. Объединенный цикл управления

Расчеты, проведенные в предыдущем примере, показывают, что периодичность поставок по разным ресурсам различна и составляет от 2,0 до 2,9 недель. Для организации поставок более удобным является единый цикл. Предположим, что все поставки осуществляются с единой периодичностью, раз в две недели. Размеры партий при этом не оптимальны и соответствуют двухнедельным объемам спроса.

1. Насколько двухнедельный цикл поставок выгоднее еженедельного цикла?
2. Насколько оптимальное управление по различным циклам на разные виды сырья выгоднее единого двухнедельного цикла?

Модель с растянутой поставкой

Рассмотрим детерминированную модель с растянутой поставкой, постоянной интенсивностью спроса и отсутствием дефицита. Пополнение запаса в такой модели происходит не мгновенно и занимает некоторое время, которым нельзя пренебречь и считать его равным 0. График динамики запасов изображен на рис. 3.4.

Так, например, происходит пополнение внутрипроизводственных запасов, производимых на самом предприятии.

Некоторый промежуток времени T′ продукция интенсивно производится и поставляется на склад (но в то же время и потребляется на предприятии). Далее в течение промежутка T″ на оборудовании производится другая продукция, запас первой продукции не пополняется, он только потребляется. Через время $T = T' + T''$ (цикл управления) на предприятии снова приступают к производству первой продукции и пополнению ее запасов.

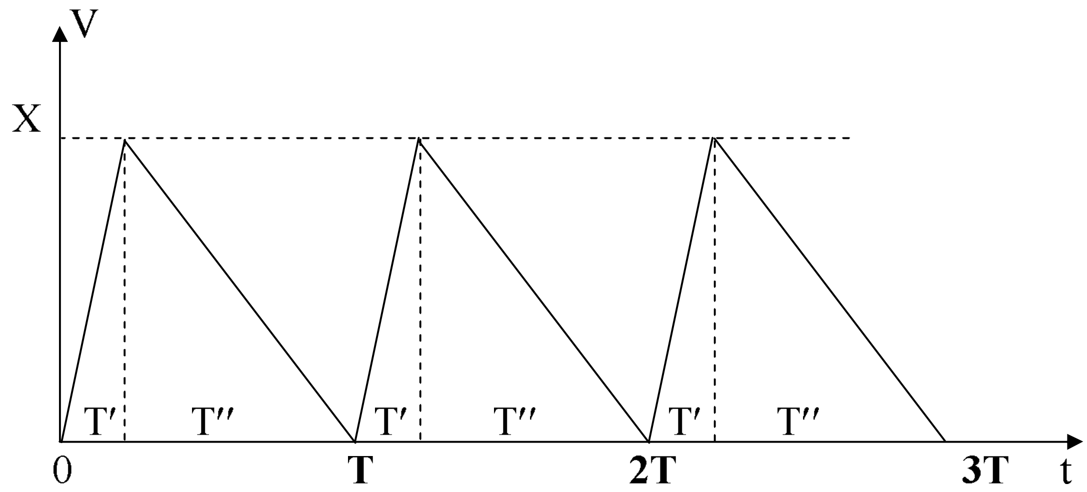


Рис. 3.4. Динамика складского запаса в модели с растянутой поставкой

Постоянные затраты в такой ситуации связаны с переналадкой оборудования для запуска в производство партии изделий. Переменные затраты, как обычно, связаны с хранением.

Все время продукция потребляется с постоянной интенсивностью α. Обозначим посредством β интенсивность поставки, то есть объем поставки в единицу времени. Таким образом, реальная скорость пополнения склада в периоде T′ равна $\beta - \alpha$. Эта разность определяет угол наклона прямой на промежутке T′. На промежутке T″ угол наклона определяется величиной α.

Параметры бездефицитной модели с растянутой поставкой

α – объем спроса в единицу времени (интенсивность спроса);

a – фиксированные издержки, связанные с актом пополнения запаса;

b – издержки по хранению единицы запаса в течение единицы времени;

β – объем поставки в единицу времени (интенсивность поставки).

Характеристики модели

T – длина цикла управления запасами;

T′ – интервал поставки (время, в течение которого поступает партия);

T″ – интервал отсутствия поставки;

Q – размер партии;

X – максимальный объем запаса на складе;

L – средние издержки в единицу времени без учета стоимости партии;

$\overline{L}$ – средние издержки в единицу времени с учетом стоимости партии.

Связи между характеристиками модели

$$T = Q/\alpha, \qquad Q = \alpha T, \qquad X = (\beta - \alpha)T',$$

$$T' = X/(\beta - \alpha), \qquad X = \alpha T'', \qquad T'' = X/\alpha,$$

$$T = T' + T'' = X/(\beta - \alpha) + X/\alpha = X/(\alpha/(1 - \alpha/\beta)),$$

$$Q = \alpha T = X + \alpha T' = X/(1 - \alpha/\beta), \quad X = Q(1 - \alpha/\beta), \quad X = T\alpha(1 - \alpha/\beta),$$

$$L = (a + bXT/2)/T = (a + b\alpha(1 - \alpha/\beta)T^2/2)/T = a/T + b\alpha(1 - \alpha/\beta)T/2 = a\alpha/Q + b(1 - \alpha/\beta)Q/2, \qquad \overline{L} = L + c\alpha.$$

Характеристики оптимальной стратегии

Оптимальная стратегия определяется теми значениями характеристик T^*, T'^*, T''^*, Q^*, X^*, L^* и $\overline{L}^*$, при которых издержки L становятся минимальными. Достаточно найти одну из этих характеристик, остальные определятся через нее однозначно на основе приведенных выше соотношений.

Оптимизационные формулы

$T^* = (2a/(\alpha b(1 - \alpha/\beta)))^{0,5}$,

$T'^* = (2a\alpha/(\beta^2 b(1 - \alpha/\beta)))^{0,5}$, $T''^* = (2a\,(1 - \alpha/\beta)/\alpha b)^{0,5}$,

$Q^* = (2a\alpha/(b(1 - \alpha/\beta)))^{0,5}$, $X^* = (2a\alpha(1 - \alpha/\beta)/b)^{0,5}$,

$L^* = (2a\alpha b(1 - \alpha/\beta))^{0,5}$, $\bar{L}^* = L^* + c\alpha = (2a\alpha b(1 - \alpha/\beta))^{0,5} + c\alpha$.

В оптимизационных формулах присутствует величина

$$1 - \alpha/\beta.$$

Отношение α/β сопоставляет интенсивность спроса с интенсивностью поставки. Рост интенсивности поставки в пределе приводит к ситуации мгновенной поставки. Оптимизационные формулы для нашей модели в пределе, при $\alpha/\beta \to 0$, переходят в формулы для рассмотренной выше простейшей модели с мгновенной поставкой. При этом, в частности, становится:

$$Q^* = X^*, \quad T''^* = T, \quad T'^* = 0.$$

Модель с допущением дефицита

Рассмотрим детерминированную модель с мгновенной поставкой, постоянной интенсивностью спроса и допущением дефицита – допущением отложенного спроса. График динамики запасов изображен на рис. 3.5.

В течение промежутка времени T_1 спрос на продукцию удовлетворяется за счет имеющегося запаса. Далее в течение промежутка T_2 запас отсутствует, возникает ситуация дефицита, постепенно накапливается долг величины S по неудовлетворенному спросу. Этот долг удовлетворяется за счет части поступившей партии Q, после чего на складе остается запас X, и все возобновляется по циклу. Длина цикла $T = T_1 + T_2$.

Штраф за дефицит исчисляется на основе коэффициента g – издержек за единицу объема дефицита в единицу времени.

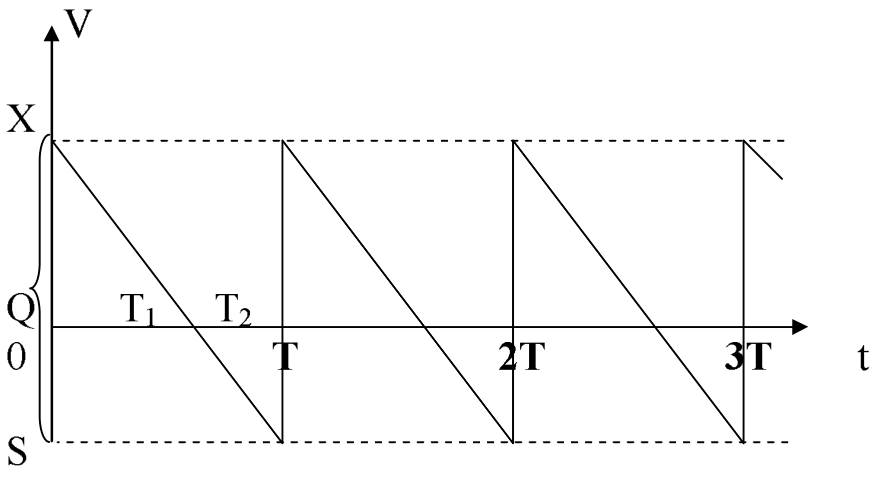


Рис. 3.5. Динамика складского запаса в модели с допущением дефицита

Параметры модели с мгновенной поставкой и допущением дефицита

α – объем спроса в единицу времени (интенсивность спроса);

a – фиксированные издержки, связанные с актом пополнения запаса;

b – издержки по хранению единицы запаса в течение единицы времени;

g – величина издержек за единицу дефицита в течение единицы времени.

Характеристики модели

T – длина цикла управления запасами;

T_1 – интервал удовлетворения спроса (интервал наличия запаса и отсутствия дефицита);

T_2 – интервал учета спроса (интервал отсутствия запаса и наличия дефицита);

Q – размер партии;

X – максимальный объем запаса на складе;

S – максимальный объем дефицита;

L – средние издержки в единицу времени без учета стоимости партии;

$\bar{L}$ – средние издержки в единицу времени с учетом стоимости партии.

Связи между характеристиками модели

$T = T_1 + T_2$, $\quad Q = X + S$, $\quad Q = \alpha T$,

$T = Q/\alpha$, $\quad T_1 = X/\alpha$, $\quad T_2 = S/\alpha$,

$X = \alpha T_1$, $\quad S = \alpha T_2$,

$$L = (a + bXT_1/2 + gST_2/2)/T = (a + b\alpha T_1^2/2 + g\alpha T_2^2/2)/(T_1 + T_2),$$

$$\overline{L} = L + c\alpha.$$

Характеристики оптимальной стратегии

Оптимальная стратегия определяется теми значениями характеристик T^*, T_1^*, T_2^*, Q^*, X^*, S^*, при которых издержки L становятся минимальными. Достаточно найти дополняющую пару этих характеристик, например, T_1^* и T_2^*, или, например, X^* и S^*, остальные определятся через них однозначно на основе приведенных выше соотношений.

Оптимизационные формулы

$T^* = (2a(1 + b/g)/(\alpha b))^{0,5}$, $\quad T_1^* = (2a/(\alpha b(1 + b/g)))^{0,5}$,

$$T_2^* = (2ab/(\alpha g^2(1 + b/g)))^{0,5},$$

$$Q^* = (2a\alpha(1 + b/g)/b)^{0,5},$$

$X^* = (2a\alpha/(b(1 + b/g)))^{0,5}$, $\quad S^* = (2a\alpha b/(g^2(1 + b/g)))^{0,5}$,

$$bX^* = gS^*,$$

$L^* = (2a\alpha b/(1 + b/g))^{0,5}$, $\quad L^* = L^* + c\alpha = (2a\alpha b/(1 + b/g))^{0,5} + c\alpha.$

В оптимизационных формулах присутствует величина $1 + b/g$. Обратная ей величина, $1 / (1 + b/g))$, называется ***плотностью убытков из-за дефицита***.

Отношение b/g сопоставляет затраты по хранению и по дефициту. Рост штрафа за дефицит в пределе приводит к запрету дефицита ввиду его абсолютной невыгодности. Оптимизационные формулы для нашей модели в пределе, при $b/g \to 0$, переходят в формулы для рассмотренной выше простейшей модели без дефицита. При этом, в частности, становится:

$Q^* = X^*$, $\quad S^* = 0$, $\quad T_1^* = T$, $\quad T_2^* = 0$.

Модель с растянутой поставкой и допущением дефицита

Рассмотрим теперь наиболее общую из детерминированных моделей – модель с растянутой поставкой, постоянной интенсивностью спроса и допущением дефицита. График динамики запаса изображен на рис. 3.6.

Цикл управления T разделяется на 4 части,

$$T = T_1' + T_1'' + T_2' + T_2''.$$

В течение $T' = T_1' + T_2'$ происходит одновременное пополнение и расход запаса, в течение $T'' = T_1'' + T_2''$ идет чистый расход запаса.

Часть $T_1 = T_1' + T_1''$ соответствует наличию запаса, часть $T_2 = T_2' + T_2''$ наличию дефицита.

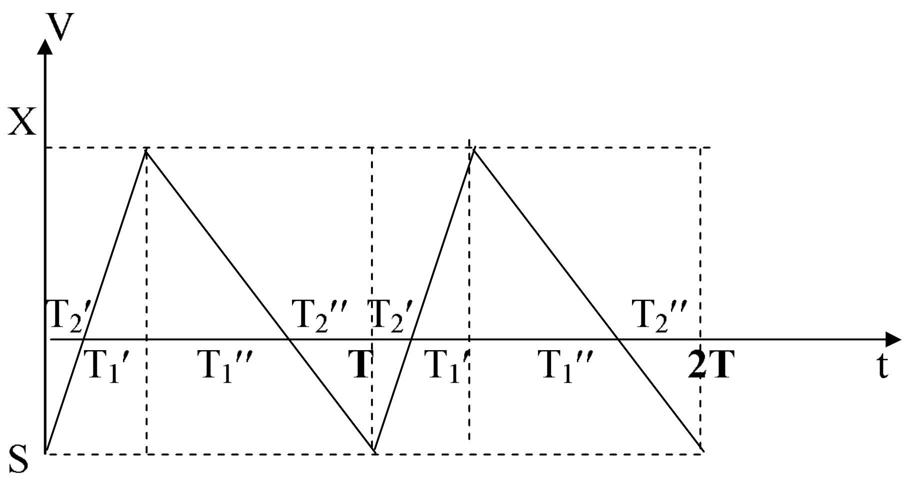


Рис. 3.6. Динамика запаса в модели с растянутой поставкой и допущением дефицита

Параметры модели с растянутой поставкой и допущением дефицита

α – объем спроса в единицу времени (интенсивность спроса);

a – фиксированные издержки, связанные с актом пополнения запаса;

b – издержки по хранению единицы запаса в течение единицы времени;

g – величина издержек за единицу дефицита в течение единицы времени;

β – объем поставки в единицу времени (интенсивность поставки).

Характеристики модели

T – длина цикла управления запасами;

T_1' – интервал удовлетворения спроса (интервал наличия запаса и отсутствия дефицита) в условиях осуществления поставки;

T_1'' – интервал удовлетворения спроса (интервал наличия запаса и отсутствия дефицита) в условиях отсутствия поставки;

T_2' – интервал учета спроса (наличия дефицита и отсутствия запаса) в условиях осуществления поставки;

T_2'' – интервал учета спроса (наличия дефицита и отсутствия запаса) в условиях отсутствия поставки;

Q – размер партии;

X – максимальный объем запаса на складе;

S – максимальный объем дефицита;

L – средние издержки в единицу времени без учета стоимости партии;

$\overline{L}$ – средние издержки в единицу времени с учетом стоимости партии.

Связи между характеристиками модели

$$T = T_1' + T_1'' + T_2' + T_2'', \qquad Q = \alpha T, \qquad T = Q/\alpha,$$

$$X = \alpha T_1'' = (\beta - \alpha)\, T_1', \qquad T_1' = X/(\beta - \alpha), \qquad T_1'' = X/\alpha,$$

$$S = \alpha T_2'' = (\beta - \alpha)\, T_2', \qquad T_2' = S/(\beta - \alpha), \qquad T_2'' = S/\alpha,$$

$$T = (X + S)/(\alpha(1 - \alpha/\beta)), \qquad Q = X + S + \alpha(T_1' + T_2'), \qquad Q = \beta(T_1' + T_2'),$$

$$L = (a + bX(T_1' + T_1'')/2 + gS(T_2' + T_2'')/2)/T =$$

$$= (a + (bX^2/(\alpha(1 - \alpha/\beta)))/2 + (gS^2/(\alpha(1 - \alpha/\beta)))/2)/((X + S)/(\alpha(1 - \alpha/\beta))),$$

$$\overline{L} = L + c\alpha.$$

Характеристики оптимальной стратегии

Оптимальная стратегия определяется теми значениями характеристик T^*, $T_1'^*$, $T_1''^*$, $T_2'^*$, $T_2''^*$, Q^*, X^*, S^*, при которых издержки L становятся минимальными. Достаточно найти согласованную дополняющую пару этих характеристик, например, X* и S*, остальные определятся через них однозначно на основе приведенных выше соотношений.

Оптимизационные формулы

$T^* = (2a(1 + b/g)/(\alpha b(1 - \alpha/\beta)))^{0,5}$,

$T_1'^* = (2a\alpha/(b\beta(1 - \alpha/\beta)(1 + b/g)))^{0,5}$ $T_1''^* = (2a(1 - \alpha/\beta)/(\alpha b(1 + b/g)))^{0,5}$,

$T_2'^* = (2a\alpha b/(\beta g^2(1 - \alpha/\beta)(1 + b/g)))^{0,5}$, $T_2''^* = (2ab(1 - \alpha/\beta)/(\alpha g^2(1 + b/g)))^{0,5}$,

$Q^* = (2a\alpha(1 + b/g)/(b(1 - \alpha/\beta)))^{0,5}$, $X^* = (2a\alpha(1 - \alpha/\beta)/(b(1 + b/g)))^{0,5}$,

$S^* = (2a\alpha b(1 - \alpha/\beta)/(g^2(1 + b/g)))^{0,5}$, $bX^* = gS^*$,

$L^* = (2a\alpha b(1 - \alpha/\beta)/(1 + b/g))^{0,5}$, $\bar{L}^* = L^* + c\alpha = (2a\alpha b(1 - \alpha/\beta)/(1 + b/g))^{0,5} + c\alpha$.

В оптимизационных формулах присутствуют величины $1 + b/g$ и $1 - \alpha/\beta$. Рост штрафа за дефицит приводит в пределе к модели без дефицита, а рост интенсивности поставки приводит к модели с мгновенной поставкой.

Оптимизационные формулы для нашей модели в пределе, при $b/g \to 0$ или при $\alpha/\beta \to 0$, переходят в формулы для рассмотренных выше моделей.

Модели многих товаров

На складе хранятся запасы продукции различных видов. Если они не взаимодействуют (не конкурируют) между собой, то запасы каждого вида можно оптимизировать отдельно, независимо от других.

Однако обычно между запасами возникает взаимодействие. Например, хранение продукции одного вида может требовать таких условий освещенности, влажности, температуры, которые не согласуются с условиями хранения других видов продукции. Продукты конкурируют за режим хранения. Суммарная стоимость оптимальных партий может не вписываться в бюджет организации. Возникает конкуренция за ограниченный объем затрат. Одновременно поступившие оптимальные партии разных продуктов могут не помещаться на площади склада. Возникает конкуренция за использование ограниченной площади. Совместно вывозимые партии разных продуктов могут не помещаться в одном контейнере. Возникает конкуренция за объем контейнера.

В такого рода ситуациях индивидуальная оптимизация по каждому виду продукции отдельно не дает эффекта, требуется совместная оптимизация. Решается задача поиска условного экстремума, в общем случае на основе функции Лагранжа.

Модель с совмещением поставок

Предположим, что поставки на склад n товаров осуществляются из одной географической точки и поэтому они могут быть совмещены. Проанализируем возможность уменьшения затрат путем совмещения поставки и экономии на транспортировке.

Пусть, как обычно:

a – постоянные затраты (одни и те же по любому виду товара);

b_i – коэффициент переменных затрат по i-му товару;

α_i – интенсивность спроса по i-му товару.

Мы будем исходить из того, что стратегия управления запасами является регулярной. Если поставки осуществляются совместно по всем n продуктам, то периодичность поставок оказывается единой (рис. 3.7).

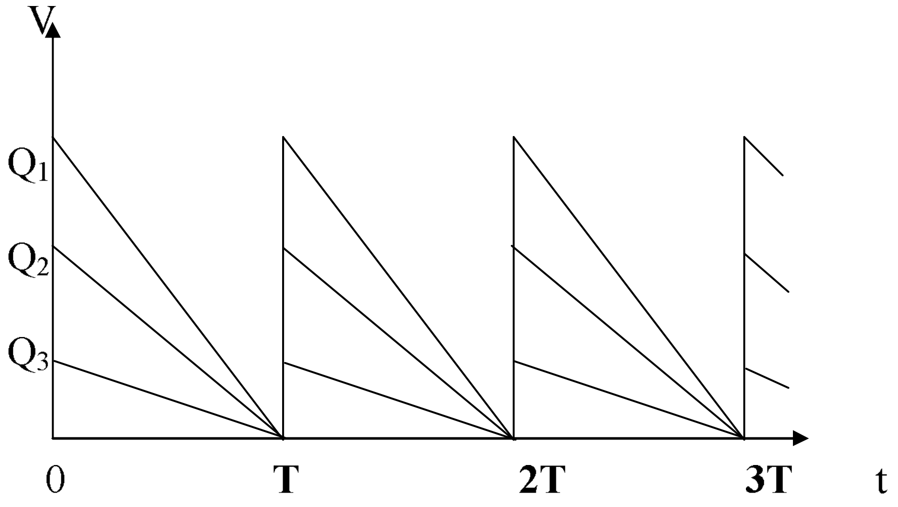


Рис. 3.7. Динамика трех видов запасов при согласованном цикле

Обозначим соответствующий период (цикл управления запасами) посредством T. Тогда размер партии i-го товара Q_i определяется формулой:

$$Q_i = \alpha_i T.$$

При таких объемах поставки запасы всех продуктов исчерпываются одновременно, в конце периода T, в этот момент поступает новая партия, и цикл возобновляется.

Затраты в единицу времени определяются формулой:

$$L = \frac{a + \frac{1}{2} T^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i}{T}.$$

Минимум затрат, определяемый так же, как и в выводе формул Уилсона, достигается при величине цикла:

$$T^* = \sqrt{\frac{2a}{\sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i}},$$

и при этом размер партии k-го товара равен:

$$Q_k^* = \alpha_k T^* = \alpha_k \cdot \sqrt{\frac{2a}{\sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i}},$$

а минимальные затраты по управлению запасами в единицу времени равны:

$$L^* = \sqrt{2a \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i}.$$

Если есть возможность совместить транспортировку различных товаров, то это следует сделать. Грузоподъемность транспортного средства предполагается ограниченной некоторой величиной P. Рассчитанные оптимальные размеры партии товаров, подготовленные к совместной транспортировке, могут превысить допустимую грузоподъемность P.

Для корректировки партии следует сравнить сумму оптимальных величин Q_k^* с грузоподъемностью. Обозначим посредством R сумму оптимальных размеров партий:

$$R = \sum_{k=1}^{n} Q_k^*.$$

Если при этом $R \le P$, то размер партии товаров следует сохранить равным найденным выше значениям Q_k^*. Если же это неравенство не выполнено, то есть если $R > P$, то значения Q_k^* следует откорректировать до новых величин $\tilde{Q}_k^*$.

Эти новые величины должны по-прежнему соответствовать условиям единого цикла управления запасами. Таким образом, необходимо откорректировать длину цикла. Обозначим новую длину посредством $\tilde{T}^*$. Тогда:

$$\tilde{Q}_k^* = \alpha_k \tilde{T}^*,$$

и при этом:

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{Q}_k^* = P.$$

Отсюда получаем формулу для откорректированной длины цикла $\tilde{T}^*$:

$$\tilde{T}^* = \frac{P}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}.$$

Новые, откорректированные размеры партии определяются по формулам:

$$\tilde{Q}_j^* = \alpha_j \cdot \frac{P}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}.$$

Они полностью вписываются в грузоподъемность P:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{Q}_j^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \frac{P}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = P$$

и соответствуют единому циклу управления запасами $\tilde{T}^*$.

Отметим, что новые размеры партий $\tilde{Q}_k^*$ и новая длина единого цикла $\tilde{T}^*$ пропорциональны прежним оптимальным величинам Q_k^* и T^* с одним и тем же коэффициентом пропорциональности h, равным:

$$h = \frac{P}{R}.$$

Действительно, при P = R сумма оптимальных партий в точности вмещается в транспортное средство, так что при этом условии мы должны получить:

$$T^* = \frac{R}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}.$$

Таким образом:

$$\tilde{T}^* = \frac{P}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = h \cdot T^*.$$

Аналогично:

$$\tilde{Q}_k^* = \alpha_k \tilde{T}^* = \alpha_k \cdot h \cdot T^* = h \cdot \alpha_k \cdot T^* = h \cdot Q^*.$$

Новые размеры партии и длина цикла пропорциональны прежним оптимальным величинам. Новые издержки $\tilde{L}^*$ по управлению запасами в единицу времени тоже пропорциональны прежним оптимальным издержкам L^*, но с другим коэффициентом пропорциональности H,

$$\tilde{L} = H \cdot L^*,$$

где

$$H = \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right).$$

Минимальное значение этого коэффициента H равно 1. Оно достигается только при h = 1, то есть при условии R = P. В этом случае откорректированные величины длины цикла, размера партии и минимальных издержек совпадают с оптимальными.

Напомним, что если выполняется неравенство R < P, то отпадает сама необходимость в корректировке.

В табл. 3.1 приведены данные по коэффициенту пропорциональности издержек H, соответствующих некоторым значениям величины h.

Таблица 3.1

Связь между коэффициентами пропорциональности

h	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	1,00
H	10,03	5,05	2,13	1,25	1,04	1,00

Предположим, что срок выполнения заказа τ меньше длины цикла $\tilde{T}^*$. Тогда критический уровень K_i запаса i-го товара, определяющий момент подачи нового заказа на пополнение запаса данного товара, вычисляется по формуле:

$$K_i = \tau \times \alpha_I \,.$$

В условиях определенности критический уровень достигается для всех видов запасов одновременно.

Управление запасами в условиях неопределенности и риска

Основной источник неопределенности в системах управления запасами связан со спросом. При оценке спроса используют прогнозы, не имеющие абсолютной надежности.

Другим источником неопределенности являются поставки. Реальный срок поставки не всегда совпадает с запланированным. Не исключены нарушения и в объемах поставки.

Момент подачи заказа определяется критическим уровнем запаса (прогнозируемым объемом спроса за прогнозируемый срок поставки). Реальный объем спроса за реальный срок поставки может отличаться от прогнозируемого в большую или в меньшую сторону. Если реальный спрос оказался меньше, то к моменту прихода партии на складе еще остаются невостребованные запасы, то есть приходится оплачивать хранение излишних запасов. Если же реальный спрос оказался больше, то возникает ситуация дефицита.

Дополнительные издержки возникают в обоих случаях, но второй случай, ситуация дефицита, связан зачастую со значительно большим ущербом для фирмы и рассматривается как худший из двух вариантов. Поэтому стремятся избежать дефицита за счет создания и хранения дополнительного запаса. Это так называемый ***страховой запас***. Он предназначен для нейтрализации сбоев в снабжении в случае, когда спрос превышает прогнозируемый уровень.

Критический уровень запаса, определяющий момент подачи нового заказа на пополнение склада, в этих условиях становится выше. Теперь он включает в себя и страховой запас.

Чем выше уровень страхового запаса, тем больше издержки по его содержанию, но тем меньше возможность возникновения дефицита. Размер страхового запаса нуждается в оптимизации.

Можно оптимизировать страховой запаса исходя из ***уровня обслуживания***, уровня надежности бесперебойной, бездефицитной работы системы. Можно оптимизировать исходя из затрат, связанных с покрытием дефицита.

На основе собранной статистики можно оценить параметры вероятностного закона распределения (математическое ожидание и стандартное отклонение). Для обработки данных полезно воспользоваться функциями Excel СРЗНАЧ и СТАНДОТКЛОН.

Далее при заданном уровне обслуживания (например, 90%, или 95%, или 99%) можно рассчитать необходимый размер страхового запаса. Если общий спрос складывается из многих независимых требований, то естественно предположить, что его величина распределена по нормальному закону. В этом случае полезны функции НОРМСТОБР и НОРМОБР.

В детерминированных моделях время и уровень запаса четко связаны друг с другом. Два принципа управления: по времени, оставшемуся до конца очередного цикла, и по оставшемуся запасу (по критическому уровню) дают один и тот же результат.

Неопределенность спроса разрушает точность такой связи, придает ей стохастический характер. Два принципа разъединяются. В этих условиях прибегают к одному из них.

Циклическое управление (*управление по типу P*) предписывает подавать заказы на поставку периодически, но размер очередной партии определять по сложившимся обстоятельствам (по оставшимся запасам).

Уровневое управление (*управление по типу Q*) предписывает подавать заказы на партии фиксированного размера при изменяющейся периодичности – исходя из уровня оставшихся запасов (критического уровня).

Выше были выведены формулы для ситуации с совмещением поставок. Рассмотрим уровневое управление для такой ситуации.

Запасы на складе в промежутке времени между поставками постепенно уменьшаются. Предположим, что запас одного из n товаров уже достиг критического уровня, а по другим товарам критический уровень, возможно, еще не достигнут. По данному товару пора подавать заказ. Поскольку поставки выгодно совмещать, следует определить объемы заказов и по другим товарам с учетом их остатков на складе.

Обозначим посредством u_i надкритический объем запаса i-го товара. Таким образом:

$$u_i \geq 0 \text{ для всех } i,$$

$$u_m = 0 \text{ для некоторого } m.$$

Пусть U – сумма всех таких надкритических запасов,

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i .$$

В условиях совмещенного цикла объемы поставок $\tilde{Q}_j^*$ определяются из системы уравнений, соответствующих двум условиям:

$\sum_{k=1}^{n} \tilde{Q}_k^* = P$ (условие загрузки транспорта),

$\tilde{Q}_j^* + u_j = \alpha_j \tilde{T}^*$ $(1 \le j \le n)$ (условие единого цикла).

Решение этой системы дает формулу для скорректированной длины единого цикла $\tilde{T}^*$

$$\tilde{T}^* = \frac{P+U}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

и формулы для объемов заказов

$$\tilde{Q}_j^* = \alpha_j \cdot \frac{P+U}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} - u_j.$$

Сравним полученные формулы с теми, которые были выведены раньше для склада, работающего в условиях полной определенности. В условиях определенности критические уровни по всем товарам достигаются одновременно. Отсюда следует, что U = 0 и новые полученные формулы автоматически переходят в формулы, выведенные ранее для детерминированных условий работы склада.

Новые возможности открываются при определении стратегии управления запасами путем имитационного моделирования работы системы.

Конкретная ситуация УЗОР

(Управление Запасами – Оптимальные Решения)

Оптовая фирма «Гамма» торгует продуктами питания на рынке Санкт-Петербурга. Эта продукция высокого качества закупается у итальянских производителей – макаронные изделия, растительное масло различных сортов (подсолнечное, соевое, оливковое, кукурузное, арахисовое, виноградное), минеральная вода, овощные консервы, соусы, приправы...

Продажи этих продуктов подвержены сезонным изменениям. Макароны охотнее покупают весной и хуже в конце лета и осенью, когда на рынке в изобилии появляются овощи. Минеральная вода лучше расходится летом.

Несмотря на существующую конкуренцию в целом спрос на продукты, продаваемые фирмой «Гамма», достаточно устойчив. Фирма дорожит сложившейся клиентурой и стремится не допустить ситуации, когда покупатель остался бы неудовлетворенным. На складе фирмы должны быть достаточные запасы продукции.

Продукты доставляются из Италии в Петербург автотранспортом. В транспортном контракте оговариваются пункты и сроки загрузки, характер продукции и ее вес, срок доставки и пункты разгрузки.

Срок доставки зависит от времени года и в среднем составляет около одной недели. Трейлер имеет емкость 83 кубометра и вмещает 20 тонн груза. Разгрузка трейлера занимает 2–3 часа.

Транспортные расходы на доставку груза составляют около 15–16 тыс. руб.

Вопросами поставок продуктов в Петербург занимается молодой менеджер фирмы. Результаты предварительного изучения вопроса содержатся в следующих рисунках (рис. 3.8–3.10).

Месяцы	*Растительное масло (тонны)*		
	Поступления	Продажи	Остатки
январь	4.2	14.3	0.8
февраль	15.4	12.5	3.7
март	16.0	13.7	6.0
апрель	9.9	13.9	2.0
май	17.9	15.6	4.3
июнь	19.1	14.8	8.6
июль	12.7	15.7	5.6
август	18.8	16.3	8.1
сентябрь	12.6	16.6	4.1
октябрь	21.6	16.2	9.5
ноябрь	26.4	16.5	19.4
декабрь	16.8	14.9	21.3
январь	14.2	14.9	20.6
февраль	6.4	14.5	12.5
март	13.2	15.0	10.7
апрель	15.0	13.3	12.4
май	14.0	15.7	10.7
июнь	18.8	15.6	13.9

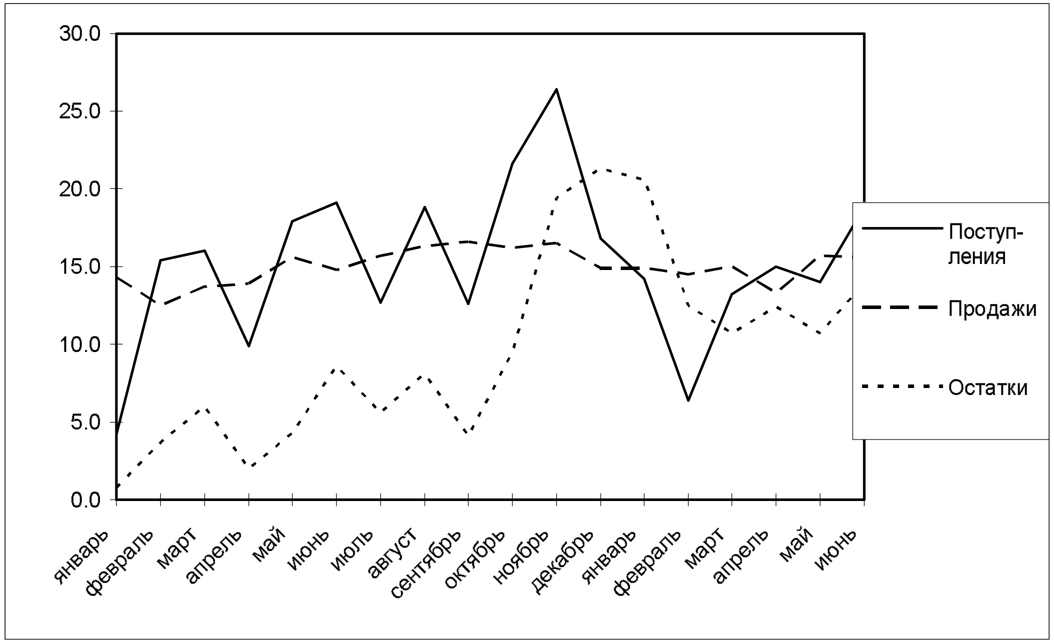


Рис. 3.8. Динамика поступления, продажи и остатков *Растительного масла* в торговой фирме «Гамма»

Месяцы	Минеральная вода (тонны)		
	Поступления	Продажи	Остатки
январь	21.2	22.6	12.4
февраль	30.0	23.2	19.2
март	23.5	27.4	15.3
апрель	19.5	26.4	8.4
май	33.4	26.7	15.1
июнь	28.0	33.6	9.5
июль	36.0	31.8	13.7
август	37.2	34.0	16.9
сентябрь	35.2	27.8	24.3
октябрь	21.3	28.9	16.7
ноябрь	16.2	22.0	10.9
декабрь	37.0	23.1	24.8
январь	18.3	24.2	18.9
февраль	16.5	20.3	15.1
март	16.0	19.8	11.3
апрель	35.0	27.0	19.3
май	33.0	28.5	23.8
июнь	22.6	33.4	13.0

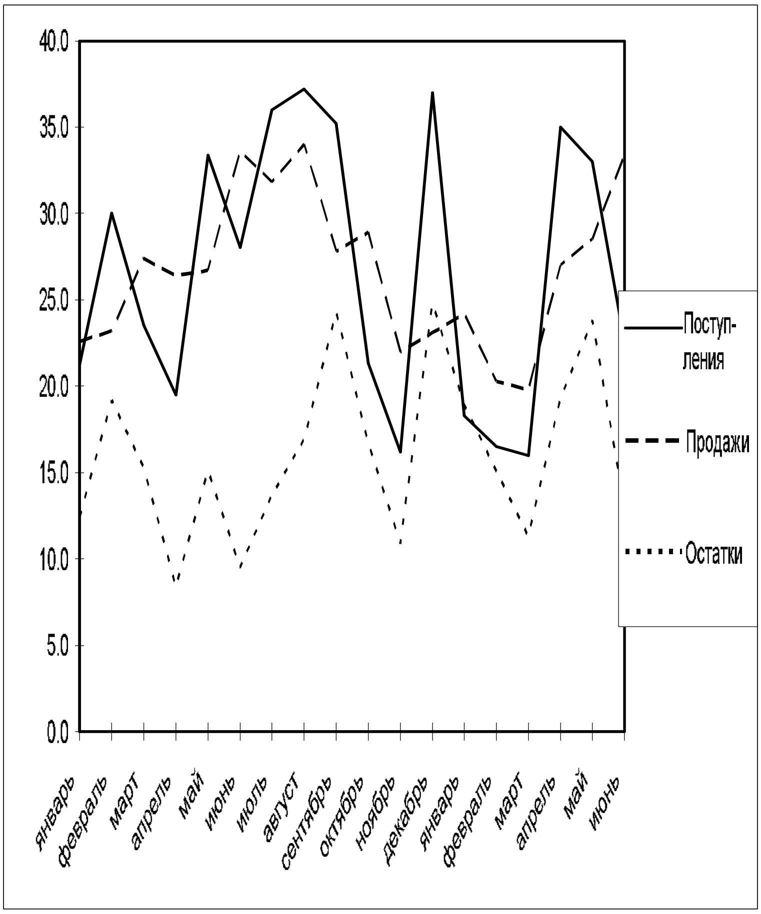


Рис. 3.9. Динамика поступления, продажи и остатков *Минеральной воды* в торговой фирме «Гамма»

Месяцы	Макаронные изделия (тонны)		
	Поступления	Продажи	Остатки
январь	17.4	16.5	6.7
февраль	22.0	16.4	12.3
март	12.5	19.0	5.8
апрель	18.6	18.6	5.8
май	17.3	21.0	2.1
июнь	22.6	19.8	4.9
июль	24.4	21.5	7.8
август	16.0	18.5	5.3
сентябрь	17.5	17.4	5.4
октябрь	17.0	17.8	4.6
ноябрь	12.6	16.2	1.0
декабрь	17.8	15.5	3.3
январь	18.3	17.8	3.8
февраль	19.0	16.5	6.3
март	19.3	18.5	7.1
апрель	20.0	17.5	9.6
май	18.5	20.0	8.1
июнь	21.6	20.8	8.9

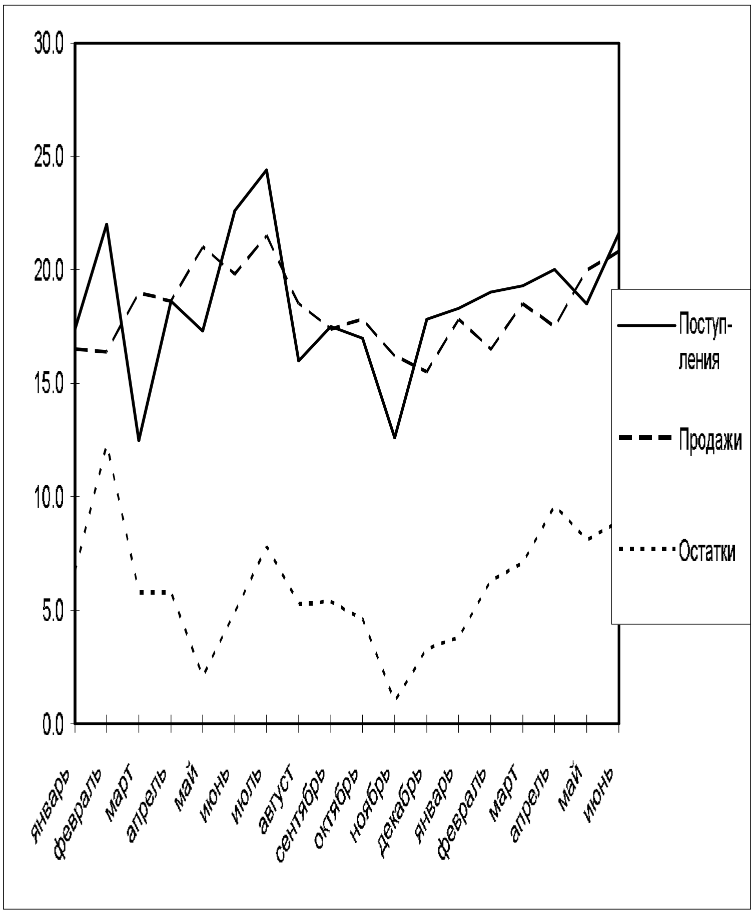


Рис. 3.10. Динамика поступления, продажи и остатков *Макаронных изделий* в торговой фирме «Гамма»

Каковы сегодняшние уровни запасов? Следует ли их пополнить и по каким видам продуктов? У каких поставщиков и по каким ценам закупить продукты? Когда отправить очередную партию продуктов в Петербург? Что туда включить? В каких объемах? Эти вопросы находятся в ведении менеджера по закупкам.

Репутация фирмы «Гамма» – залог успеха: клиенты должны быть удовлетворены качеством и ассортиментом продуктов.

В то же время кажется, что принятый в фирме объем запасов неоправданно высок, что заставляет фирму нести излишние издержки, связывает часть ее капитала, уменьшает ее коммерческую рентабельность.

Менеджер решает разобраться с этими вопросами. Для этого он анализирует данные за последние полтора года по трем основным видам продуктов: макаронным изделиям, минеральной воде и растительному маслу.

Он хочет разобраться в закономерностях поставок и спроса, составить прогноз спроса и план снабжения на ближайший период времени, найти и сформулировать общие правила принятия решений и выработки стратегии.

Менеджер должен разработать допустимую (и эффективную!) стратегию управления запасами. Накопленная прибыль представляется ему хорошим ориентиром при оценке той или иной возможной стратегии.

Поскольку ситуация кажется не совсем простой, он ставит перед собой задачу разобраться сначала с одним продуктом – растительным маслом. Это позволит затем с большей ясностью определить общую стратегию для трех продуктов.

Предполагается попробовать найти эффективную стратегию по выбранному продукту экспериментальным, имитационным, игровым путем.

Общие правила имитационного формирования будущей стратегии формулируются в виде **Справочных материалов к игре *УЗОР*.**

Далее разрабатывается рабочая форма, в которой указаны данные за первые два периода времени. Затем можно попытаться найти эффективную стратегию, экспериментируя с разными вариантами объемов и сроков дальнейших заказов.

Если такая табличная форма построена в Excel, с соответствующими расчетными формулами в ячейках, то дальнейшее экспериментирование может идти достаточно быстро и успешно и без труда охватить большое число промежутков времени, что необходимо при выработке долгосрочной стратегии.

Для распространения полученных результатов на несколько товарных групп можно воспользоваться данными, представленными на рис. 3.11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Поступления, продажи и запасы по отдельным видам продовольственных товаров (в тоннах)**									
2	***Месяц***	***Растительное масло***			***Минеральная вода***			***Макаронные изделия***		
3		*Поступл.*	*Продажи*	*Остатки*	*Поступл.*	*Продажи*	*Остатки*	*Поступл.*	*Продажи*	*Остатки*
4	январь	4,2	14,3	0,8	21,2	22,6	12,4	17,4	16,5	6,7
5	февраль	15,4	12,5	3,7	30,0	23,2	19,2	22,0	16,4	12,3
6	март	16,0	13,7	6,0	23,5	27,4	15,3	12,5	19,0	5,8
7	апрель	9,9	13,9	2,0	19,5	26,4	8,4	18,6	18,6	5,8
8	май	17,9	15,6	4,3	33,4	26,7	15,1	17,3	21,0	2,1
9	июнь	19,1	14,8	8,6	28,0	33,6	9,5	22,6	19,8	4,9
10	июль	12,7	15,7	5,6	36,0	31,8	13,7	24,4	21,5	7,8
11	август	18,8	16,3	8,1	37,2	34,0	16,9	16,0	18,5	5,3
12	сентябрь	12,6	16,6	4,1	35,2	27,8	24,3	17,5	17,4	5,4
13	октябрь	21,6	16,2	9,5	21,3	28,9	16,7	17,0	17,8	4,6
14	ноябрь	26,4	16,5	19,4	16,2	22,0	10,9	12,6	16,2	1,0
15	декабрь	16,8	14,9	21,3	37,0	23,1	24,8	17,8	15,5	3,3
16	январь	14,2	14,9	20,6	18,3	24,2	18,9	18,3	17,8	3,8
17	февраль	6,4	14,5	12,5	16,5	20,3	15,1	19,0	16,5	6,3
18	март	13,2	15,0	10,7	16,0	19,8	11,3	19,3	18,5	7,1
19	апрель	15,0	13,3	12,4	35,0	27,0	19,3	20,0	17,5	9,6
20	май	14,0	15,7	10,7	33,0	28,5	23,8	18,5	20,0	8,1
21	июнь	18,8	15,6	13,9	22,6	33,4	13,0	21,6	20,8	8,9
22										
23	**Расчеты по каждому виду продуктов при заданном уровне обслуживания**									**99%**
24										
25	Ср. месячные продажи		15,00			26,71			18,29	
26	Ср. суточные продажи A		*0,50*			*0,89*			*0,61*	
27	Месячная дисперсия		1,32			20,04			3,17	
28	Суточная дисперсия		0,04			0,67			0,11	
29	Суточное станд. откл.		0,21			0,82			0,33	
30	Срок поставки τ (дни)				7,00					
31	Ср. продажи за срок τ		3,50			6,23			4,27	
32	Станд. откл. за срок τ		0,56			2,16			0,86	
33	Страховой запас S		*1,29*			*5,03*			*2,00*	
34	Критич. уровень запаса A+S		***4,79***			***11,26***			***6,27***	
35	*Примечание:*									
36	*Если учитывать сезонность, то следует исходить из ожидаемых продаж в данном сезоне.*									
37										
38	**Расчеты по совместному заказу трех видов продуктов (стратегия согласованного цикла) в детерминированной ситуации**									
39	Сумма A_k				14,00					
40	Грузоподъемность трейлера P (тонны) - дано				20,00					
41	Длина единого цикла T				1,43	10,00	(дней)			
42	Объемы заказов Q_k		***5,00***			***8,90***			***6,10***	
43	Суммарный объем заказа (проверка)				20,00					
44	Длина единого цикла (дн.)		10,00			10,00			10,00	

Рис. 3.11. Данные по трем товарам и образец расчетов критического уровня запаса и объема поставки

Справочные материалы к ситуации *УЗОР*

ЗАКАЗ ТОВАРА

1. *Закупочная цена* в данном варианте игры равна 16000 руб. за тонну.

2. *Объем заказа* (закупки) товара определяется решением Компании.

3. Заказ делается в начале периода. Заказанная партия товара поступает на склад Компании в начале следующего периода.

4. С заказом связаны различные типы затрат: затраты на приобретение, организационные и транспортные расходы и др. Затраты на приобретение пропорциональны объему заказа. Остальные виды затрат фиксированы и составляют 15680 руб. за каждый заказ, независимо от его объема.

ПРОДАЖА ТОВАРА

1. Отпускная цена в данном варианте игры равна 22,24 руб. за кг.

2. Объем спроса на товары в данном варианте игры составляет 3,5 т за неделю.

3. Фактический объем продаж Компании есть наименьшая среди двух величин: Объем продукции для продажи и Объем спроса.

4. По окончании периода у Компании могут оказаться нераспроданные запасы. Эти запасы можно продавать в следующих периодах.

5. Завершающий запас равен разности между объемом продукции для продажи и объемом спроса. Величина завершающего запаса не может быть отрицательной.

6. В данном варианте игры неудовлетворенный спрос, то есть Дефицит товара на складе, не допускается.

ХРАНЕНИЕ ЗАПАСОВ

1. Затраты на хранение 1 тонны запасов в течение одной недели составляют 3,5% стоимости этой тонны.

2. Затраты на хранение всего объема запаса за неделю равны 3,5% от стоимости среднего объема товара, находящегося на складе в течение недели.

РАСЧЕТ ПРИБЫЛИ

1. Прибыль определяется разностью между доходами (выручкой) от продаж и суммой всех расходов. Прибыль в игре может оказаться отрицательной величиной.

2. Доходы от продаж равны произведению отпускной цены на фактический объем продаж.

3. В учитываемые расходы входят:

- расходы на заказ и закупку товара (если в данном периоде производится заказ);
- расходы на хранение запасов.

РЕШЕНИЯ КОМПАНИИ

1. В каждом периоде компания принимает решения по:

- факту заказа товара (заказывать или не заказывать товар);
- объему заказа товара (если принято решение заказывать товар).

2. Партия товара, заказанная в данном периоде, оплачивается в этом же периоде. Однако на склад Компании она поступит лишь в начале следующего периода.

РАСЧЕТ ДЕНЕЖНЫХ СРЕДСТВ

В конце каждого периода Компания определяет величину прибыли в данном периоде и величину накопленных средств с учетом накопленных ранее финансовых результатов всех предшествующих периодов.

ЦЕЛИ ИГРОВОЙ ИМИТАЦИИ

Компания должна найти наилучшую (наиболее экономную) стратегию управления запасами, то есть определить оптимальную периодичность и оптимальные объемы заказов товара. Ориентиром при оценке качества выбранной стратегии управления запасами является динамика накопленных средств.

Расчетные модели управления запасами в среде Excel

Задание 3.2

Постройте в Excel расчетную форму и проведите экспериментальное определение оптимальной стратегии управления запасами.

В качестве образца воспользуйтесь формой, представленной на рис. 3.12–3.14. Начинаем с предлагаемого начального файла, который содержит исходную числовую информацию за два периода времени и формат для ввода исходных данных в эту и в будущие модели. В качестве периода выбран срок поставки (неделя).

Отдельно выделен блок ячеек с исходными данными (рис. 3.12). Расчетная форма состоит из двух частей. В ее левой части (рис. 3.13) представлены данные по динамике запасов в тоннах за два периода.

В правой части (рис. 3.14) приведены данные по динамике денежных средств за те же два периода.

По второму периоду вводим расчетные формулы. Продолжаем их вниз на 52 периода (на год). Копируем формулы также и на первый период, кроме трех окрашенных ячеек первого периода, которые остаются пустыми. Формула нарастающей прибыли первого периода вводится отдельно.

Требуется определить размер поставки (ввести с клавиатуры столбец *Новый заказ*) и периодичность поставок. Полезно построить диаграмму, отображающую динамику денежных средств и дефицита. Заказы однозначно определяют последующие поставки, со сдвигом на один период. Поставки должны удовлетворять двум условиям.

Во-первых, они должны быть таковы, чтобы система работала без дефицита, то есть без перебоев.

Во-вторых, они должны обеспечивать максимально возможный финансовый результат.

Разработайте оптимальные решения по поставкам. Определите оптимальный объем поставок. Определите длину цикла (периодичность) поставок.

В результате должна быть получена Модель 1 для определения размера заказа и периодичности поставок в детерминированной ситуации.

Задание 3.3

Проведите формульный расчет характеристик оптимальной стратегии управления запасами на основе формул Уилсона.

Задание 3.4

По данным ситуации УЗОР рассчитайте характеристики оптимальной стратегии управления запасами трех продуктов, используя стратегию согласованного цикла и ориентируясь на средние объемы спроса (по образцу рис. 3.11).

Задание 3.5

Продолжите задание 3.4. Постройте оптимальную стратегию управления запасами трех продуктов с учетом страхового запаса, используя стратегию согласованного цикла и ориентируясь на разброс объемов спроса (по образцу нижней части рис. 3.11).

Задание 3.6

Постройте Модель 2 для автоматического определения критического уровня запасов, при достижении которого следует подавать заказ на поставку.

Для этого скопируйте таблицу и диаграмму Модели 1 и перестройте ее в Модель 2. В исходные данные Модели 2 вводим *Критический уровень запасов* и *Объем заказа*. В расчетную таблицу добавляются 3 столбца: *Заказы в пути, Фиктивный запас* и *Признак критического уровня.* Вводятся соответствующие формулы в эти столбцы. Вводятся расчетные формулы в столбец *Новый заказ*. Остальное содержание таблицы остается прежним.

Задание 3.7

Постройте Модель 3. Эта Модель 3 служит для работы с ежедневными данными в детерминированной ситуации.

Изменяем заголовки таблицы и ярлычков листов в копии предыдущей модели. В блоке исходных данных преобразуем недельные данные в суточные (делим на 7). Срок проверки оставляем равным 1, то есть проверка запасов теперь будет проходить ежедневно.

В расчетной таблице в столбце *Приход* ссылку на первый заказ смещаем на 7 периодов вниз и протягиваем до конца таблицы. Последние две строки расчетной таблицы протягиваем вниз до периода 365 (на год).

В результате получаем Модель 3.

Имитационные модели управления запасами в среде Excel

При моделировании реальных систем управления запасами важную роль играет учет источников неопределенности ситуации. Основным источником неопределенности является спрос.

Продолжим задание 3.7 с одним продуктом. Достройте таблицу так, чтобы можно было провести имитационное моделирование оптимальной стратегии управления запасами в условиях неопределенности спроса при заданном среднем значении объема спроса и характеристике разброса (необходимые данные содержатся в рис. 3.11). Для этого следует в ячейки столбца «Объем спроса» таблицы 4.7 ввести соответствующие формулы, содержащие датчик случайных чисел СЛЧИС.

При нажатии на клавишу F9 пересчитываются случайные числа, а вслед за ними столбец «Объем спроса» и все остальные ячейки таблицы. Из-за случайной составляющей спроса может возникать дефицит. В этих условиях работу системы с заданным уровнем качества обеспечивает страховой запас.

Величину страхового запаса можно подобрать на основе обработки результатов имитационного моделирования. Для автоматической обработки строится специальный расчетный блок. Вариант организации такого блока представлен на рис. 3.15.

Этот блок содержит столбец заголовков и три расчетных столбца.

В столбце «В данном году» введены формулы расчета итоговых показателей по последнему акту имитации. Эти показатели рассчитываются по модельной таблице, охватывающей год работы компании. При нажатии на клавишу F9 модельная таблица пересчитывается, новые результаты таблицы соответствуют очередному году, и эти новые результаты замещают прежние в строке «В данном году».

В столбце «В сумме за все годы» суммируются и накапливаются результаты расчетов по всем прошедшим годам имитации. В частности, в верхней ячейке «Число лет» автоматически подсчитывается число актов эксперимента. Формулы данного столбца содержат циклические ссылки.

Для того чтобы Excel корректно работал с циклической ссылкой, следует пройти по цепочке: Меню *Сервис – Параметры* – Вкладка *Вычисления* и там поставить флаг (птичку) в поле *Итерации*, а в поле *Предельное число итераций* с клавиатуры поставить число 1 (вместо стоящего там по умолчанию числа 100). Затем нажать кнопку OK.

В столбце «В среднем за год» данные предыдущего столбца усредняются делением на число лет. Этот столбец является ключевым, на его данных основывается анализ ситуации и разработка решений по объему страхового запаса.

Теперь каждое нажатие на клавишу F9 приводит к пересчету всех случайных чисел и всего, что от них зависит. Таким образом, каждое отдельное нажатие на F9 соответствует отдельному акту имитации и моделирует отдельный период работы системы. Последовательное многократное нажатие на F9 соответствует компьютерной имитации работы.

Для получения полезного результата в имитационном эксперименте должно пройти достаточно много актов, то есть следует нажать на клавишу F9 достаточно много раз. В принципе, чем больше, тем лучше.

Необходимое число нажатий можно визуально определить, наблюдая за изменениями столбца «В среднем за год». Когда результаты в этом столбце станут достаточно стабильными (перестанут изменяться с удовлетворяющей нас степенью точности), нажатия на F9 можно прекратить.

После изменения исходных данных (например, объема страхового запаса) сбор данных по имитационному эксперименту следует начать сначала. Для удобной организации сброса статистики на начало можно воспользоваться функцией ЕСЛИ. Эта функция в формулах столбца «В сумме за все годы» разрывает циклические ссылки в случае, если в специально выделенной ячейке стоит 1.

Для сброса статистики на начало следует ввести 1 в указанную выделенную ячейку. В результате во всех трех строках блока «Статистика» должны появиться одинаковые данные.

Для начала нового накопления статистики следует удалить 1 из выделенной ячейки. После этого можно начинать эксперимент сначала, последовательно нажимая на клавишу F9.

Задание 3.8

Достройте таблицу так, чтобы можно было провести имитационное моделирование оптимальной стратегии управления запасами в условиях неопределенности спроса, при заданном среднем значении объема спроса и характеристике разброса.

Постройте блок автоматической обработки статистики, возникающей при реализации имитационной модели. В результате получается Модель 4.

Проведите имитационное моделирование, направленное на определение объема страхового запаса.

Модель 4 служит для определения страхового запаса в условиях нестабильного спроса. Следует при заданном уровне надежности работы системы (уровне обслуживания) подобрать приемлемый размер страхового запаса.

Задание 3.9

Следующим важным источником неопределенности является срок поставки.

Дополните таблицу так, чтобы можно было провести имитационное моделирование оптимальной стратегии в условиях не только неопределенности спроса, но и неопределенности сроков поставки, при заданных вероятностных характеристиках срока.

В результате получается Модель 5.

Проведите имитационное моделирование, направленное на определение объема страхового запаса.

Задание 3.10

Еще одним источником неопределенности является объем поставки.

Достройте таблицу дополнительно так, чтобы можно было провести имитационное моделирование оптимальной стратегии в условиях не только неопределенности спроса и срока, но и неопределенности объемов поставки при заданных вероятностных характеристиках объема.

Достройте блок обработки статистики соответствующим образом. В результате получается Модель 6.

Проведите имитационное моделирование, направленное на определение объема страхового запаса.

Задание 3.11

В предыдущих моделях дефицит не допускался. Рассмотрим теперь новую ситуацию, когда дефицит допускается, но за него приходится платить.

В оплате дефицита (*штрафе за дефицит*) присутствует постоянная составляющая, связанная с самим фактом возникновения дефицита, и переменная составляющая, пропорциональная его объему.

Достройте таблицу так, чтобы можно было провести имитационное моделирование оптимальной стратегии в условиях платы за дефицит.

Достройте блок обработки статистики соответствующим образом. В результате получается Модель 7.

Проведите имитационное моделирование, направленное на определение объема страхового запаса.

Задание 3.12

Распространите имитационные модели, полученные при выполнении заданий 3.8–3.11 (Модели 4–7), на управление запасами трех товаров одновременно. Для этого сделайте необходимое число копий модели одного товара и измените в каждой копии исходные данные под свой товар. Исходные данные содержатся на рис. 3.11.

Кроме того, потребуется сводная таблица для расчета тех показателей, где товары взаимодействуют друг с другом. Так, объем поставки должен укладываться в грузоподъемность трейлера, то есть не превышать 20 т.

Задание 3.13

Постройте модель и проведите расчет по формированию плана поставок для интересной вам ситуации.

	A	B	C	D
1	***Модель 1 - Определение оптимальной стратегии пополнения запасов в условиях полной определенности (период - неделя)***			
2				
3				
4	**Исходные данные**			
5				
6	**Деньги, цены и затраты**			
7	Начальные ден. ср-ва (тыс. руб.)		300	
8	Закупочная цена (руб./ кг)		16	
9	Отпускная цена (руб./ кг)		22,24	
10	Доставка (тыс. руб)		15,68	
11	Хранение (% в неделю)		3,50%	
12	Прочие затраты (тыс. руб. / нед.)		14	
13				
14	**Заказы, запасы, сроки**			
15	***Объем заказа (т)***			
16	Период проверки (нед)		1	
17	Часть периода (%)		0%	
18	Срок поставки (нед)		1	
19	Расчетный срок (нед)			
20	**Средний спрос (т)**	За неделю	3,50	
21		За расч. срок		
22	**Станд. отклон. спроса (т)**	За неделю		
23		За расч. срок		
24	Надежность работы системы (%)		100%	
25	Страховой запас (т)	Расчетный		
26		Назначенный		
27	***Критич. уровень (т)***			

Рис. 3.12. Форма для исходных данных Модели 1

	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Задача - сформировать последовательность заказов в условиях определенности.**								
2									
3	**Заказы, запасы спрос, дефицит (т)**								
4	**Неделя**	Запасы в начале	**Новый заказ**	**Приход**	Для продажи	Объем спроса	Объем продаж	Запасы в конце	**Объем дефицита**
5	**1**	6,50	**4,00**	0,00	6,50	3,50	3,50	3,00	0,00
6	**2**	3,00	0,00	**4,00**	7,00	3,50	3,50	3,50	0,00
7	**3**								
8	**4**								
9	**5**								
10	**6**								
11	**7**								
12	**8**								
13	**9**								
14	**10**								
15	**11**								
16	**12**								
17	**13**								
18	**14**								
19	**15**								
20	**16**								
21	**17**								
22	**18**								
23	**19**								
24	**20**								
25	**21**								
26	**22**								
27	**23**								

Рис. 3.13. Левая часть расчетной формы Модели 1

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1									
2									
3	**Выручка, затраты, прибыль (тыс. руб.)**								
4	Выручка от продаж	Затраты на закупку	Затраты на доставку	Затраты на хранение	Прочие затраты	Сумм. затраты	Прибыль	Нараст. прибыль	**Касса**
5	77,840	64,000	15,680	2,660	14,000	96,340	-18,500	-18,500	281,500
6	77,840	0,000	0,000	2,940	14,000	16,940	60,900	42,400	342,400
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									

Рис. 3.14. Правая часть расчетной формы Модели 1

Для сброса статистики на начало введите 1:

Статистические результаты

СТАТИСТИКА	В данном году	В сумме за все годы	В среднем за год
Число лет	1	263	1
Сумм. дефицит (т)	1,23	870,80	3,31
Число дефицит. циклов	5	1762	6,70
Общее число циклов	14	3563	13,55
Число дефицит. дней	6	2559	9,73
Общее число дней	365	95631	363,62
Уровень обслуживания	64,29%	134	**51%**
Надежность	98,36%	25599%	**97%**
Итог. прибыль **(тыс. руб.)**	-49,53	-22790,03	**-86,65**
Доля (+) итог. прибыли	0%	3100%	12%
Доля (-) итог. прибыли	100%	23300%	89%

Рис. 3.15. Блок обработки статистических результатов имитационной модели

Раздел 4. МОДЕЛИ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Материал раздела направлен на то, чтобы студент умел:
- выявлять источники неопределенности в работе системы;
- анализировать производственную систему, работающую в условиях неопределенности, как систему обслуживания;
- определить количественные оценки производительности работы в условиях неопределенности;
- определить виды оценок качества работы систем обслуживания базовых типов;
- провести компьютерный расчет оценок производительности и качества работы таких систем;
- строить имитационные компьютерные модели систем обслуживания базовых типов;
- проводить количественный анализ результатов имитации;
- применять полученные знания к компьютерному моделированию оценки производительности и качества бизнес-процессов на предприятии.

Основные понятия

Организация и работа систем обслуживания (СО) занимает существенное место как собственно в производственном процессе, так и в эффективном доведении полученных результатов до потребителя. Именно качество работы СО в существенной мере определяет воспринимаемое потребителем качество результата.

К СО относятся системы разного рода и масштаба, такие, как производственные, информационные, торговые, транспортные, энергетические системы, системы связи, предприятия бытового и медицинского обслуживания и др. Подразделения предприятия связаны информационными и материальными потоками. На СО можно смотреть, как на систему управления потоками.

На вход в СО поступает поток требований на обслуживание. В качестве таких требований могут выступать, например, изделия, поступающие на очередной этап обработки или готовые к упаковке, заявка на материалы, хранящиеся на складе, поломки в оборудовании, прибывающие в аэропорт самолеты, телефонные вызовы. Характерным является то, что требования поступают обычно в нерегулярные, случайные моменты времени. Неопределенный характер имеет и продолжительность обслуживания. Все это создает нерегулярности в работе системы, является причиной ее перегрузок или недогрузок, причиной сбоев в ее работе. При анализе и оценке качества деятельности СО следует учитывать не только средние параметры входящих потоков и процессов обслуживания, но и их более детальные характеристики.

Структуры

Системы обслуживания могут обладать различной структурой. Обычно в них можно выделить следующие четыре основных звена: входящий поток требований, накопитель, узлы обслуживания, выходящий поток обслуженных требований.

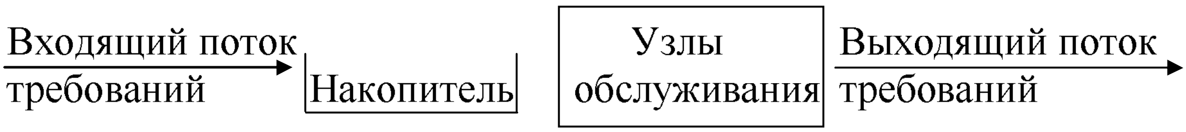


Рис. 4.1. Типичная структура системы обслуживания

Характеристики потока требований, входящего в СО, важны для правильной организации процесса обслуживания.

Элементы выходящего потока преобразованных, обслуженных требований должны отвечать заданным критериям качества. Это качество в существенной мере определяется качеством процесса обслуживания. Выходящий поток представляет дополнительный интерес в связи с тем, что он весь или какая-то его часть может оказаться составной частью потока, входящего в другую СО.

Накопитель – место, где поступившие требования ждут начала обслуживания. С накопителем могут связываться пространственные или временные ограничения. Накопитель может быть ограничен по объему, вмещать ограниченное число требований. Требования, для которых в накопителе не нашлось места, либо оказываются в другом, внешнем накопителе, с которым связываются другие характеристики, либо вообще покидают систему.

Накопителем может быть, например, место для ждущих обработки деталей, зал для ожидающих клиентов. Иногда ограничение связывается не с физическим объемом накопителя, а непосредственно с очередью. Например, в очередной тур конкурса должно пройти заранее известное число кандидатов. Ограничение очереди при этом, по сути, эквивалентно физической ограниченности накопителя.

Ограниченность накопителя может проявляться не только в пространственных, но и во временных характеристиках. Требование, пробыв некоторое время в очереди, может покинуть ее, не дождавшись начала обслуживания. Оно может уйти в другую очередь или вообще погибнуть как требование на обслуживание в данной системе (например, если речь идет об обработке скоропортящихся продуктов).

Требования, находящиеся в накопителе, могут образовать одну общую очередь ко всем узлам обслуживания или раздельные очереди; несколько очередей могут быть однородными или специализированными (в соответствии со специализацией узлов обслуживания); требования в некоторых случаях могут переходить из одной очереди в другую; в других ситуациях такой переход может быть запрещен.

Возможны различные дисциплины очереди. Очередь может быть упорядочена естественным образом, в порядке поступления требований. Такую дисциплину часто обозначают посредством FIFO (*First In – First Out*). Возможен и противоположный порядок очереди – LIFO (*Last In – First Out*), например, при проверке контролером изделий, которые накапливаются перед ним штабелем, так что последнее изделие проверяется первым. В некоторых СО требование из накопителя выбирается случайным образом, например, при проверке качества изделия.

В некоторых системах требования делятся на группы, и одной группе отдается предпочтение в обслуживании перед другой. Предпочтение может выражаться в качестве обслуживания, его скорости или очередности. В последнем случае говорят об организации очереди с учетом приоритетов. Множество приоритетов может быть достаточно большим и даже, в принципе, бесконечным (когда, например, сначала обслуживаются требования с большей стоимостью или с меньшим ожидаемым временем обслуживания).

Большое разнообразие возможно и в организации собственно процесса обслуживания. В системе может быть один узел обслуживания (секретарь директора), а может быть несколько (отделы магазина). Число узлов может даже не быть постоянным: каждая машина такси, находящаяся в данный момент на стоянке, может рассматриваться как отдельный узел. Узлы могут быть однородными (способными обслужить любое требование, поступающее в систему) или специализированными. Даже будучи однородными они могут отличаться значениями своих характеристик. Среди таких характеристик одной из наиболее существенных является интенсивность обслуживания, то есть среднее число требований, которое способен обслужить узел в единицу времени.

Далее, узлы могут работать параллельно (причалы в порту, кассы в универсаме), последовательно (конвейер) или смешанным образом. В процессе обслуживания они могут работать независимо или взаимодействовать, помогать друг другу. Узлы могут выходить из строя и поступать на восстановление (ремонт, лечение) в другую СО (уже в качестве требований на обслуживание).

Обычно в каждый момент времени узел обслуживает не более одного требования. Однако бывают СО, в которых узлы обычно обслуживают сразу группы требований: преподаватель в вузе или экскурсовод в музее.

В некоторых случаях нас не интересует дальнейшая судьба обслуженных требований; требования, поступающие в систему, не связываются с требованиями, уходящими из нее. В других же случаях следует учитывать, что обслуженные требования после некоторой задержки (обычно со случайной, не известной заранее продолжительностью) опять поступают на вход. В первом случае СО называются незамкнутыми, во втором – замкнутыми. Замкнутой системой является, например, бригада ремонтных рабочих, закрепленная за одной и той же группой оборудования, или поликлиника, обслуживающая данную территорию.

Разнообразие различных структур, связанных с накопителем и организацией процесса обслуживания, является весьма значительным, и приведенное выше описание легко можно продолжить.

В литературе по теории обслуживания (ее называют также теорией очередей) разные авторы используют различную терминологию. Термины «заявка», «клиент» используются как синонимы термина «требование», а термины «канал», «линия», «прибор», «сервер» – как синонимы термина «узел обслуживания».

Качество

Качество обслуживания можно оценивать с разных точек зрения. Одна точка зрения внешняя; это оценка работы со стороны потока обслуживаемых требований, потребителей обслуживания, клиентов системы. Другая точка зрения внутренняя; здесь оцениваются издержки системы, трудности организации работы, устойчивость функционирования.

Качество должно соответствовать требованиям рынка, ожиданиям потребителей. Во многих случаях обеспечение и поддержка уровня качества выше требуемого может приводить просто к снижению уровня используемой производительности, увеличению издержек и не давать взамен никаких конкурентных преимуществ.

Поломка оборудования ведет к снижению используемых производственных мощностей. Это может привести к критическим последствиям для организации в целом. Для предотвращения такого рода последствий можно содержать бригаду специалистов-ремонтников, резерв запчастей, дополнительное резервное оборудование. Такие резервы способствуют обеспечению бесперебойной работы, но при этом вызывают дополнительные издержки, омертвление средств и связанные с этим упущенные возможности.

Анализ ситуации достаточно сложен, в нем требуется охватить разнообразные варианты развития ситуации и отдаленные последствия решений. Такой анализ может быть проведен только на основе моделирования потоков и их обслуживания в системе.

Аналитический и имитационный подход

Для моделирования систем обслуживания применяются два подхода: аналитический и имитационный. При аналитическом подходе используются расчетные формулы, позволяющие оценить основные характеристики работы системы. Существующие формулы пригодны для ограниченного множества базовых моделей. Их адаптация к реальной ситуации иногда представляет проблему и в любом случае требует достаточно высокой математической квалификации. Однако получаемый результат имеет при таком подходе ясно очерченную математическую форму.

Результаты, получаемые на основе имитационной модели, имеют статистическую форму. Имитационный подход основан на моделировании неопределенности с помощью датчика случайных чисел. Роль такого датчика в Excel выполняет функция СЛЧИС. Она генерирует случайные числа, распределенные равномерно на промежутке [0, 1). Используя разнообразные функции Excel можно преобразовать такое распределение в другие распределения. Например, для получения нормального распределения с заданными параметрами полезно воспользоваться функцией НОРМОБР.

Полученные генераторы случайных чисел позволяют моделировать случайные события (приход требования в систему, процесс обслуживания и др.). Соединяя такие события в соответствии со структурой и последовательностью работы исследуемой системы, мы получаем ее имитационную модель. Дальнейшее имитирование работы системы и накопление соответствующей статистики позволяет анализировать качество работы системы, видеть ее узкие места, варьировать организацию работы и изучать возникающие изменения, принимать решения по модификации системы обслуживания.

Мы рассмотрим оба подхода: аналитический и имитационный, освоим расчет наиболее важных характеристик для базовых моделей и подходы к построению имитационных моделей.

Аналитические модели

Во всех рассматриваемых ниже системах обслуживания предполагается, что как интервалы времени между поступлениями последовательных требований, так и продолжительность обслуживания требования распределены по экспоненциальному закону.

Для потока требований это означает, что

$$P\{t_{инт} > t\} = e^{-\lambda t}.$$

Параметр λ определяет среднее число требований, поступающих в систему за единицу времени. Соответственно величина $1/\lambda$ равна средней длине интервала времени между последовательными требованиями.

Для процесса обслуживания это означает, что

$$P\{t_{обсл} > t\} = e^{-\nu t},$$

где ν – интенсивность обслуживания, то есть среднее число требований, обслуживаемых узлом в единицу времени. Соответственно величина $1/\nu$ равна средней продолжительности обслуживания одного требования.

В большинстве характеристик работы системы параметры λ и ν участвуют в виде отношения λ/ν. Такое отношение называется загрузкой системы обслуживания и обозначается посредством ρ,

$$\rho = \frac{\lambda}{\nu}.$$

Посредством N обозначается число узлов обслуживания системы. Ниже приводятся формулы как для общего случая (для произвольного N), так и для важнейшего частного случая с одним узлом (N = 1).

Характеристики работы СО с отказами

СО с отказами: общие условия

Базовый вариант системы обслуживания с отказами удовлетворяет следующим условиям.

1. Если в момент поступления требования имеется хотя бы один свободный узел обслуживания, то требование сразу начинает обслуживаться (любым из свободных узлов).
2. Каждый узел в любой момент времени обслуживает не более одного требования.
3. Каждое требование обслуживается одним узлом.
4. Обслуживание не прерывается.
5. По окончании обслуживания требование покидает систему.
6. Если в момент прихода требования все узлы в системе обслуживания оказываются занятыми, то требование получает отказ в обслуживании и покидает систему не обслуженным.

Первое условие говорит о том, что между моментом прихода требования и началом обслуживания нет паузы, пришедшее требование не ждет начала обслуживания.

Из второго, третьего и четвертого условий вытекает, что требования обслуживаются независимо и узлы работают независимо: организация обслуживания не предусматривает их группировку и перерывы в обслуживании.

Пятое условие свидетельствует о разомкнутости системы.

Шестое условие характеризует ситуации отказа. Отказы в обслуживании возникают только при одновременной занятости всех узлов.

СО с отказами: характеристики работы для N узлов обслуживания

<u>Вероятность</u> P_j <u>наличия</u> j <u>требований в системе обслуживания</u>, то есть <u>вероятность занятости</u> j <u>узлов обслуживания</u>, равна

$$P_j = \frac{\dfrac{\rho^j}{j!}}{\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\rho^k}{k!}}.$$

Эта формула носит название <u>формулы Эрланга</u>. Она верна для СО с отказами при любом (не обязательно экспоненциальном) законе распределения длительности обслуживания с интенсивностью обслуживания, равной ν.

Вероятность отсутствия требований в системе обслуживания P_0 определяется этой формулой при j = 0, то есть формулой:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Поступающее требование получает отказ в обслуживании, если все узлы обслуживания заняты. Вероятность отказа $P_{отк}$ соответствует формуле Эрланга при j = N,

$$P_{отк} = P_N = \frac{\frac{\rho^N}{N!}}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Вероятность $P_{отк}$ характеризует долю требований, получающих отказ. Противоположная ей величина характеризует долю обслуженных требовании и называется относительной пропускной способностью СО.

Величина относительной пропускной способности α определятся формулой:

$$\alpha = 1 - P_{отк} = 1 - P_N.$$

Абсолютная пропускная способность СО характеризует среднее число требований, поступающих в узлы обслуживания в единицу времени.

Величина абсолютной пропускной способности А определяется формулой:

$$A = \lambda \cdot \alpha = \lambda \cdot (1 - P_N).$$

Среднее число занятых узлов обслуживания $M_{зан}$ равно

$$M_{зан} = \rho \cdot \alpha.$$

Среднее число свободных узлов $M_{св}$ равно

$$M_{св} = N - M_{зан}.$$

Разумеется,

$$M_{зан} + M_{св} = N.$$

Средняя доля рабочего (занятого) времени узла обслуживаня $d_{раб}$ равна

$$d_{раб} = M_{зан} / N.$$

Средняя доля свободного времени узла обслуживаня $d_{св}$ равна

$$d_{св} = M_{св} / N.$$

Конечно,

$$d_{раб} + d_{св} = 1.$$

СО с отказами: характеристики работы для 1 узла обслуживания

Рассмотрим полученные характеристики СО с отказами для важного частного случая, когда в системе имеется единственный узел обслуживания:

$$N = 1.$$

Формулы для этого случая получаются из приведенных выше формул подстановкой в них $N = 1$ с последующими простыми преобразованиями.

Формула Эрланга принимает при этом вид:

$$P_j = \frac{\rho^j}{1+\rho}.$$

Отсюда получаем вероятность отсутствия требований в системе P_0 равна

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho}.$$

Вероятность занятости (единственного) узла обслуживания P_1 равна

$$P_1 = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Сумма этих вероятностей равна 1:

$$P_0 + P_1 = 1.$$

Вероятность P_1 совпадает с вероятностью отказа в обслуживании $P_{отк}$:

$$P_{отк} = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Величина относительной пропускной способности α определяется формулой:

$$\alpha = P_0 = \frac{1}{1+\rho}.$$

Величина абсолютной пропускной способности A определяется формулой:

$$A = \lambda \cdot \alpha = \frac{\lambda}{1+\rho}.$$

Среднее число занятых узлов обслуживания $M_{зан}$ равно

$$M_{зан} = \rho \cdot \alpha = \frac{\rho}{1+\rho} = P_{отк}.$$

Среднее число свободных узлов $M_{св}$ равно

$$M_{св} = 1 - M_{зан} = \alpha.$$

Средняя доля рабочего (занятого) времени узла обслуживаня $d_{раб}$ равна

$$d_{раб} = M_{зан} = P_{отк}.$$

Средняя доля свободного времени узла обслуживания $d_{св}$ равна

$$d_{св} = M_{св} = \alpha.$$

Задания 4.1

1. Менеджер в офисе принимает заказы по телефону. В среднем за час звонят 5 клиентов, а разговор с клиентом занимает в среднем 4 мин. Интервалы между заказами и продолжительность приема заказов распределены по экспоненциальному закону. Требуется определить:

- Процент времени простоя менеджера.
- Процент обслуженных клиентов и среднее число обслуженных клиентов в час.

2. Предположим, что интенсивность потока звонков увеличилась с 5 до 10 в час. Определите в этих условиях прежние характеристики работы системы:

- Процент времени простоя менеджера.
- Процент обслуженных клиентов и среднее число обслуженных клиентов в час.

3. Предположим, что интенсивность потока звонков увеличилась дополнительно и составляет теперь 15 звонков в час. Определите в новых условиях прежние характеристики работы системы:

- Процент времени простоя менеджера.
- Процент обслуженных клиентов и среднее число обслуженных клиентов в час.

4. Клиент, не сумевший дозвониться в фирму, делает заказ в других аналогичных фирмах. Упущенная прибыль, связанная с потерей клиента, оценивается в 10 руб. Руководство фирмы решает поставить на прием заказов еще одного менеджера. Связанные с этим дополнительные затраты составляют 20 руб./час. Определите эффективность такого решения для трех вариантов потока.

Решение таких задач рекомендуется проводить средствами Excel. Можно создать универсальную расчетную схему с выделенными ячейками для исходных данных и для результатов. Такая схема позволяет легко проводить вариантные расчеты и оперативно сравнивать результаты для различных вариантов управленческих решений.

Пример реализации такого рода расчетов для системы обслуживания с отказами приведен на рис. 4.2–4.4. Строка 11 «Слагаемые» соответствует отдельным слагаемым в знаменателе формулы Эрланга. Вероятности состояний получаются делением соответствующего слагаемого на их общую сумму – сумму всех ячеек строки 11.

В 9, 11, 13 и 14 строке условными форматами автоматически выделяются цветом доступные состояния, то есть те, номера которых не превосходят число узлов обслуживания N.

Можно сравнить характеристики работы системы с отказами при различном числе узлов обслуживания и выбрать наилучший вариант.

В приведенном ниже примере рассчитан показатель общих потерь, учитывающий как потери прибыли, связанные с вынужденными отказами в обслуживании, так и затраты на работу узлов обслуживания. Этот показатель принимает значения 280.75; 270.96 и 326.14 (руб./час), соответственно, при 2, 3 и 4 узлах обслуживания.

Наилучшим вариантом в условиях примера является вариант с 3 узлами обслуживания.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	***Система обслуживания с отказами - универсальная расчетная схема***												
2		***Технические исходные данные***						***Экономические исходные данные***					
3	**N=**	**2**	Число узлов обслуживания					**100**	Потери прибыли из-за отказа в обслуж. (руб. / треб.)				
4	**λ=**	**8**	Интенсивность вход. потока (треб. / час)					**80**	Затраты на работу узла обслуживания (руб. / час)				
5	**ν=**	**10**	Интенсивность обслуживания (треб. / час)										
6	***Расчеты***						**ρ=**	**80%**					
7													
8	Номера состояний												
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	Слагаемые												
11	1,000	0,800	0,320	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	**Вероятности состояний**												
13	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
14	0,472	0,377	0,151	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15													
16		***Технические результаты работы системы***						***Экономические результаты работы системы***					
17	**P_0=**	**0,472**	Вероятность отсутствия требований					**120,75**	Поток упущенной прибыли от отказов (руб. / час)				
18	**$P_{>0}$=**	**0,528**	Вероятность наличия требований					**160,00**	Поток затрат на процесс обслуживания (руб. / час)				
19	**$P_{отк}$=**	**0,151**	Вероятность отказа					***280,75***	***Итоговые потери (руб. / час)***				
20	**α=**	**85%**	Относительная пропускная спрсобность (%)										
21	**A=**	**6,792**	Абсолютная пропускная способность (треб. / час)										
22	**$M_{зан}$=**	**0,679**	Среднее число занятых узлов (ед)				**$d_{раб}$=**	**34%**	Доля рабочего времени узла (%)				
23	**$M_{св}$=**	**1,321**	Среднее число свободных узлов (ед)				**$d_{св}$=**	**66%**	Доля свободного времени узла (%)				

Рис. 4.2. Характеристики работы системы с отказами с 2 узлами обслуживания

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	***Система обслуживания с отказами - универсальная расчетная схема***												
2		***Технические исходные данные***						***Экономические исходные данные***					
3	N=	3	Число узлов обслуживания					100	Потери прибыли из-за отказа в обслуж. (руб. / треб.)				
4	λ=	8	Интенсивность вход. потока (треб. / час)					80	Затраты на работу узла обслуживания (руб. / час)				
5	ν=	10	Интенсивность обслуживания (треб. / час)										
6	***Расчеты***						ρ=	80%					
7													
8	Номера состояний												
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	Слагаемые												
11	1,000	0,800	0,320	0,085	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	**Вероятности состояний**												
13	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
14	0,453	0,363	0,145	0,039	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15													
16		***Технические результаты работы системы***						***Экономические результаты работы системы***					
17	P_0=	0,453	Вероятность отсутствия требований					30,96	Поток упущенной прибыли от отказов (руб. / час)				
18	$P_{>0}$=	0,547	Вероятность наличия требований					240,00	Поток затрат на процесс обслуживания (руб. / час)				
19	$P_{отк}$=	0,039	Вероятность отказа					***270,96***	***Итоговые потери (руб. / час)***				
20	α=	96%	Относительная пропускная спрсобность (%)										
21	A=	7,690	Абсолютная пропускная способность (треб. / час)										
22	$M_{зан}$=	0,769	Среднее число занятых узлов (ед)				$d_{раб}$=	26%	Доля рабочего времени узла (%)				
23	$M_{св}$=	2,231	Среднее число свободных узлов (ед)				$d_{св}$=	74%	Доля свободного времени узла (%)				

Рис. 4.3. Характеристики работы системы с отказами с 3 узлами обслуживания

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	***Система обслуживания с отказами - универсальная расчетная схема***												
2		***Технические исходные данные***						***Экономические исходные данные***					
3	N=	4	Число узлов обслуживания					100	Потери прибыли из-за отказа в обслуж. (руб. / треб.)				
4	λ=	8	Интенсивность вход. потока (треб. / час)					80	Затраты на работу узла обслуживания (руб. / час)				
5	ν=	10	Интенсивность обслуживания (треб. / час)										
6	***Расчеты***						ρ=	80%					
7													
8	Номера состояний												
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	Слагаемые												
11	1,000	0,800	0,320	0,085	0,017	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	**Вероятности состояний**												
13	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
14	0,450	0,360	0,144	0,038	0,008	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15													
16		***Технические результаты работы системы***						***Экономические результаты работы системы***					
17	P_0=	0,450	Вероятность отсутствия требований					6,14	Поток упущенной прибыли от отказов (руб. / час)				
18	$P_{>0}$=	0,550	Вероятность наличия требований					320,00	Поток затрат на процесс обслуживания (руб. / час)				
19	$P_{отк}$=	0,008	Вероятность отказа					***326,14***	***Итоговые потери (руб. / час)***				
20	α=	99%	Относительная пропускная спрсобность (%)										
21	A=	7,939	Абсолютная пропускная способность (треб. / час)										
22	$M_{зан}$=	0,794	Среднее число занятых узлов (ед)				$d_{раб}$=	20%	Доля рабочего времени узла (%)				
23	$M_{св}$=	3,206	Среднее число свободных узлов (ед)				$d_{св}$=	80%	Доля свободного времени узла (%)				

Рис. 4.4. Характеристики работы системы с отказами с 4 узлами обслуживания

Характеристики работы СО с ожиданием

СО с ожиданием: общие условия

Базовый вариант системы обслуживания с ожиданием удовлетворяет следующим условиям.

1. Если в момент поступления требования имеется хотя бы один свободный узел обслуживания, то требование сразу начинает обслуживаться (любым из свободных узлов).
2. Если все узлы заняты, то поступившее требование становится в очередь за уже имеющимся в накопителе требованиями.
3. Если в момент освобождения узла имеется хотя бы одно требование в накопителе, то первое из них по очереди сразу поступает на обслуживание.
4. Каждый узел в любой момент времени обслуживает не более одного требования.
5. Каждое требование обслуживается одним узлом.
6. Обслуживание не прерывается.
7. По окончании обслуживания требование покидает систему.

Из второго и третьего условий следует, что очередь в накопителе упорядочена естественным образом. Требования являются одинаковыми, в частности, одни требования не обладают приоритетом в обслуживании перед другими. Кроме того, любой узел доступен непосредственно из накопителя, то есть узлы работают не последовательно, а параллельно. Из этих же условий следует, что свободные узлы могут быть только при пустом накопителе. Из четвертого, пятого и шестого условий вытекает, что требования обслуживаются независимо и узлы работают независимо: организация обслуживания не предусматривает их группировку. Седьмое свидетельствует о разомкнутости системы.

Если величина загрузки системы ρ слишком велика, то система не успевает справляться с обслуживанием входящего потока требований. Очередь в такой системе обслуживания с ожиданием растет лавинообразно. Чтобы система обслуживания успевала справляться с входящим потоком требований, необходимо, чтобы величина загрузки системы ρ была меньше числа узлов обслуживания N, то есть необходимо выполнение условия

$$\rho < N.$$

В приводимых ниже формулах для СО с ожиданием предполагается, что это условие выполнено.

СО с ожиданием: характеристики работы для N узлов обслуживания

Вероятность отсутствия требований в системе обслуживания P_0 определяется формулой:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)}}.$$

В дальнейших расчетных формулах характеристик работы системы обслуживания с ожиданием участвует полученная вероятность P_0.

Вероятность наличия очереди в системе обслуживания $P_{оч}$ есть вероятность того, что число требований в системе больше числа узлов обслуживания:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)} \cdot P_0.$$

Вероятность того, что все узлы обслуживания заняты, $P_{зан}$ равна:

$$P_{зан} = \frac{\rho^N}{(N-1)!(N-\rho)} \cdot P_0.$$

Среднее число требований, находящихся в системе, $M_{тр}$ равно:

$$M_{тр} = P_0 \cdot \left(\rho \cdot \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}(N+1-\rho)}{(N-1)!(N-\rho)^2}\right).$$

Средняя длина очереди $M_{оч}$ определяется формулой:

$$M_{оч} = P_0 \cdot \frac{\rho^{N+1}}{(N-1)!(N-\rho)^2}.$$

Среднее число занятых узлов обслуживания, $M_{зан}$ равно:

$$M_{зан} = P_0\left(\rho \cdot \sum_{k=1}^{N-1}\frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} + N \cdot \frac{\rho^N}{(N-1)!(N-\rho)}\right).$$

Среднее число свободных узлов обслуживания $M_{св}$ можно найти по формуле:

$$M_{св} = N - M_{зан},$$

а также непосредственно по формуле:

$$M_{св} = P_0 \cdot \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{\rho^{N-k}}{(N-k)!}.$$

Разумеется, последние две формулы дают одинаковые результаты.

Среднее время ожидания начала обслуживания $T_{ож}$ для требования, поступившего в систему, равно:

$$T_{ож} = P_0 \cdot \frac{\rho^N}{\nu \cdot (N-1)!(N-\rho)^2}.$$

Общее время $\widetilde{T}_{ож}$, которое проводят в очереди все требования, поступившие в систему за единицу времени, определяется формулой:

$$\widetilde{T}_{ож} = P_0 \cdot \frac{\rho^{N+1}}{(N-1)!(N-\rho)^2}.$$

Среднее время $T_{тр}$, которое требование проводит в системе обслуживания, складывается из среднего времени ожидания и среднего времени обслуживания:

$$T_{тр} = T_{ож} + \frac{1}{\nu}.$$

Суммарное время $\widetilde{T}_{тр}$, которое в среднем проводят в системе все требования, поступившие за единицу времени:

$$\widetilde{T}_{тр} = \lambda \cdot T_{тр} = \widetilde{T}_{ож} + \rho.$$

Функция распределения времени ожидания начала обслуживания для требования, прибывшего в систему, является существенно более информативной вероятностной характеристикой, связанной с временем ожидания, чем просто среднее время ожидания.

Вероятность $q(t)$ того, что требование, поступившее в систему, прождет в очереди больше, чем время t, определяется формулой:

$$q(t) = P_{зан} \cdot e^{-(N\nu-\lambda)t}.$$

СО с ожиданием: характеристики работы для 1 узла обслуживания

Рассмотрим полученные характеристики СО с ожиданием для важного частного случая, когда в системе имеется единственный узел обслуживания:

$$N = 1.$$

Формулы для этого случая получаются из приведенных выше формул подстановкой в них N = 1 с последующими простыми преобразованиями.

Вероятность отсутствия требований в системе обслуживания P_0 определяется формулой:

$$P_0 = 1 - \rho.$$

Вероятность наличия очереди в системе обслуживания, $P_{оч}$:

$$P_{оч} = \rho^2.$$

Вероятность того, что все узлы обслуживания заняты, $P_{зан}$:

$$P_{зан} = \rho.$$

Среднее число требований, находящихся в системе, $M_{тр}$:

$$M_{тр} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Средняя длина очереди $M_{оч}$:

$$M_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Среднее число занятых узлов обслуживания $M_{зан}$:

$$M_{зан} = \rho.$$

Среднее число свободных узлов обслуживания $M_{св}$:

$$M_{св} = 1 - \rho.$$

Среднее время ожидания начала обслуживания $T_{ож}$:

$$T_{ож} = \frac{\rho}{\nu(1-\rho)}.$$

Общее время $\tilde{T}_{ож}$, которое проводят в очереди все требования, поступившие в систему за единицу времени:

$$\tilde{T}_{ож} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Среднее время $T_{тр}$, которое требование проводит в системе:

$$T_{тр} = \frac{1}{\nu(1-\rho)}.$$

Суммарное время $\widetilde{T}_{тр}$, которое в среднем проводят в системе все требования, поступившие за единицу времени:

$$\widetilde{T}_{тр} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Вероятность $q(t)$ того, что требование, поступившее в систему, прождет в очереди больше, чем время t:

$$q(t) = \rho \cdot e^{-(\nu-\lambda)t}.$$

При внешнем сходстве формул для систем обслуживания с ожиданием и с отказами, между ними есть одно принципиальное различие. Оно состоит в том, что наиболее важные характеристики первой системы связаны с ожиданием, с очередью; эти характеристики теряют смысл для второй системы. Напротив, для второй системы важны характеристики, связанные с отказами и не имеющие смысла для системы с ожиданием.

Задания 4.2

1. На обрабатывающий центр поступают детали, в среднем 10 деталей в час. Обработка детали занимает в среднем 5 мин. Интервалы времени между моментами поступления деталей и длительность обработки являются случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону. Требуется определить:

- Средний процент времени работы и простоя обрабатывающего центра.
- Среднюю длину очереди деталей.
- Среднее время, проводимое деталью в ожидании начала обслуживания.

2. Предположим, что интенсивность потока деталей увеличилась с 10 до 11 деталей в час. Определите прежние характеристики качества работы системы в новых условиях:

- Средний процент времени работы и простоя обрабатывающего центра;
- Средняя длина очереди деталей.
- Среднее время, проводимое деталью в ожидании начала обслуживания.

3. Предположим теперь, что интенсивность потока деталей увеличилась с 11 до 12 деталей в час. Как изменятся характеристики качества работы системы в новых условиях? Определите:

- Средний процент времени работы и простоя обрабатывающего центра.
- Средняя длина очереди деталей.
- Среднее время, проводимое деталью в ожидании начала обслуживания.

Какие эффекты мы наблюдали бы в такой ситуации для СО с отказами? В чем принципиальное отличие характеристик работы двух таких систем обслуживания?

4. Потери предприятия от пролеживания деталей в очереди составляют 10 руб./час на каждую деталь. Менеджер предлагает установить еще один обрабатывающий центр. Затраты, связанные с работой этого центра, равны 50 руб./час.

- Оцените эффективность предложения менеджера для потоков в 10, 11 и 12 деталей в час. Насколько различаются эти оценки?
- Определите барьерную величину затрат по работе центра, то есть такую, при которой эффективность предложения менеджера равна 0 (для трех вариантов потока).

На рис. 4.5–4.7 дан пример расчетной формы в Excel для системы обслуживания с ожиданием. Рассмотрим ключевые ячейки этой формы.

В 9, 11, 13 и 14 строке условными форматами выделяются цветом те состояния, номера которых не превосходят числа узлов обслуживания N. Это те состояния, при которых накопитель пуст, очередь отсутствует.

Напомним, что формула для вероятности P_0 представляет собой дробь, числитель которой равен 1, а знаменатель содержит сумму двух сумм. В первой из этих сумм конечное число слагаемых, определяемое числом узлов обслуживания N. Вторая представляет собой сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Формула суммы этой геометрической прогрессии введена в ячейку H7.

Строка 11 «Слагаемые» соответствует отдельным слагаемым в знаменателе формулы для вероятности состояния P_0. Каждая из вероятностей P_k строки 14 «Вероятности состояний» получается делением соответствующего слагаемого строки 11 на сумму, состоящую из двух частей: конечной суммы помеченных ячеек строки 11 и бесконечной суммы в ячейке H7.

Можно сравнить характеристики работы системы с ожиданием при различном числе узлов обслуживания и выбрать наилучший вариант.

В приведенном ниже примере рассчитан показатель общих потерь, учитывающий как потери прибыли, связанные с вынужденным простоем требований в очереди, так и затраты на работу узлов обслуживания.

Этот показатель принимает значения 400.00; 175.24 и 241.89 (руб./час), соответственно, при 1, 2 и 3 узлах обслуживания.

Наилучшим вариантом в условиях примера является вариант с 2 узлами обслуживания.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	***Система обслуживания с ожиданием - универсальная расчетная схема***												
2		***Исходные данные***						***Экономические исходные данные***					
3	**N=**	**1**	Число узлов обслуживания					**100**	Упущенная прибыль из-за ожидания (руб. / треб.)				
4	**λ=**	**8**	Интенсивность вход. потока (треб. / час)					**80**	Затраты на работу узла обслуживания (руб. / час)				
5	**ν=**	**10**	Интенсивность обслуживания (треб. / час)										
6	***Расчеты***						ρ=	**80%**					
7							**Сумма геом. прогр.**	**3,200**					
8	Номера состояний												
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	Слагаемые												
11	1,000	0,800	0,640	0,512	0,410	0,328	0,262	0,210	0,168	0,134	0,107	0,086	0,069
12	**Вероятности состояний**												
13	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
14	0,200	0,160	0,128	0,102	0,082	0,066	0,052	0,042	0,034	0,027	0,021	0,017	0,014
15													
16		***Технические результаты работы системы***						***Экономические результаты работы системы***					
17	P_0=	**0,200**	Вероятность отсутствия требований					**320,00**	Поток упущенной прибыли от ожидания (руб. / час)				
18	$P_{>0}$=	**0,800**	Вероятность наличия требований					**80,00**	Поток затрат на процесс обслуживания (руб. / час)				
19	$P_{зан}$=	**0,800**	Вероятность того, что все узлы заняты					***400,00***	***Итоговые потери (руб. / час)***				
20	$P_{оч}$=	**0,640**	Вероятность наличия очереди										
21	$M_{оч}$=	**3,200**	Средняя длина очереди (треб)										
22	$T_{ож}$=	**0,400**	Среднее время пребывания в очереди (час)										
23	$M_{зан}$=	**0,800**	Среднее число занятых узлов (ед)				$d_{раб}$=	**80%**	Доля рабочего времени узла (%)				
24	$M_{св}$=	**0,200**	Среднее число свободных узлов (ед)				$d_{св}$=	**20%**	Доля свободного времени узла (%)				

Рис. 4.5. Характеристики работы системы с ожиданием с 1 узлом обслуживания

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	***Система обслуживания с ожиданием - универсальная расчетная схема***												
2		***Исходные данные***						***Экономические исходные данные***					
3	N=	2	Число узлов обслуживания					100	Упущенная прибыль из-за ожидания (руб. / треб.)				
4	λ=	8	Интенсивность вход. потока (треб. / час)					80	Затраты на работу узла обслуживания (руб. / час)				
5	ν=	10	Интенсивность обслуживания (треб. / час)										
6	***Расчеты***						ρ=	80%					
7							Сумма геом. прогр.	0,213					
8	Номера состояний												
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	Слагаемые												
11	1,000	0,800	0,320	0,128	0,051	0,020	0,008	0,003	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000
12	**Вероятности состояний**												
13	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
14	0,429	0,343	0,137	0,055	0,022	0,009	0,004	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
15													
16		***Технические результаты работы системы***						***Экономические результаты работы системы***					
17	P_0=	**0,429**	Вероятность отсутствия требований					**15,24**	Поток упущенной прибыли от ожидания (руб. / час)				
18	$P_{>0}$=	**0,571**	Вероятность наличия требований					**160,00**	Поток затрат на процесс обслуживания (руб. / час)				
19	$P_{зан}$=	**0,229**	Вероятность того, что все узлы заняты					***175,24***	***Итоговые потери (руб. / час)***				
20	$P_{оч}$=	**0,091**	Вероятность наличия очереди										
21	$M_{оч}$=	**0,152**	Средняя длина очереди (треб)										
22	$T_{ож}$=	**0,019**	Среднее время пребывания в очереди (час)										
23	$M_{зан}$=	**0,800**	Среднее число занятых узлов (ед)				$d_{раб}$=	**40%**	Доля рабочего времени узла (%)				
24	$M_{св}$=	**1,200**	Среднее число свободных узлов (ед)				$d_{св}$=	**60%**	Доля свободного времени узла (%)				

Рис. 4.6. Характеристики работы системы с ожиданием с 2 узлами обслуживания

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	***Система обслуживания с ожиданием - универсальная расчетная схема***												
2		***Исходные данные***						***Экономические исходные данные***					
3	N=	**3**	Число узлов обслуживания					**100**	Упущенная прибыль из-за ожидания (руб. / треб.)				
4	λ=	**8**	Интенсивность вход. потока (треб. / час)					**80**	Затраты на работу узла обслуживания (руб. / час)				
5	ν=	**10**	Интенсивность обслуживания (треб. / час)										
6	***Расчеты***						ρ=	**80%**					
7							**Сумма геом. прогр.**	**0,031**					
8	Номера состояний												
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	Слагаемые												
11	1,000	0,800	0,320	0,085	0,023	0,006	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	**Вероятности состояний**												
13	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
14	0,447	0,358	0,143	0,038	0,010	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15													
16		***Технические результаты работы системы***						***Экономические результаты работы системы***					
17	P_0=	**0,447**	Вероятность отсутствия требований					**1,89**	Поток упущенной прибыли от ожидания (руб. / час)				
18	$P_{>0}$=	**0,553**	Вероятность наличия требований					**240,00**	Поток затрат на процесс обслуживания (руб. / час)				
19	$P_{зан}$=	**0,052**	Вероятность того, что все узлы заняты					***241,89***	***Итоговые потери (руб. / час)***				
20	$P_{оч}$=	**0,014**	Вероятность наличия очереди										
21	$M_{оч}$=	**0,019**	Средняя длина очереди (треб)										
22	$T_{ож}$=	**0,002**	Среднее время пребывания в очереди (час)										
23	$M_{зан}$=	**0,800**	Среднее число занятых узлов (ед)				$d_{раб}$=	**27%**	Доля рабочего времени узла (%)				
24	$M_{св}$=	**2,200**	Среднее число свободных узлов (ед)				$d_{св}$=	**73%**	Доля свободного времени узла (%)				

Рис. 4.7. Характеристики работы системы с ожиданием с 3 узлами обслуживания

Характеристики работы СО с ограниченной очередью

СО с ограниченной очередью: общие условия

Наличие накопителя в системе обслуживания означает возможность существования очереди из требований, ожидающих начала обслуживания. Ограниченность очереди соответствует ограниченности накопителя и означает, что требования могут получить отказ до начала обслуживания. Таким образом, система с ограниченной очередью объединяет в себе как признаки системы с ожиданием, так и признаки системы с отказами.

Базовый вариант системы обслуживания с ограниченной очередью удовлетворяет следующим условиям.

1. Если в момент поступления требования имеется хотя бы один свободный узел обслуживания, то требование сразу начинает обслуживаться (любым из свободных узлов).
2. Если все узлы заняты, а накопитель не заполнен, то поступившее требование становится в очередь за уже имеющимися в накопителе требованиями.
3. Если все узлы заняты и накопитель заполнен, то поступившее требование получает отказ в обслуживании и покидает систему.
4. Если в момент освобождения узла имеется хотя бы одно требование в накопителе, то первое из них по очереди сразу поступает на обслуживание.
5. Каждый узел в любой момент времени обслуживает не более одного требования.
6. Каждое требование обслуживается одним узлом.
7. Обслуживание не прерывается.
8. По окончании обслуживания требование покидает систему.

Посредством N будем, как и раньше, обозначать число узлов обслуживания в системе. Посредством S обозначим максимально возможную длину очереди (объем накопителя).

При

$$S = 0$$

СО с ограниченной очередью превращается в систему с отказами. При

$$S = \infty$$

СО с ограниченной очередью превращается в систему с ожиданием.

Таким образом, СО с ограниченной очередью охватывает как частные случаи системы двух предшествующих видов.

В системе с ограниченной очередью очередь не может неограниченно расти, так что условие

$$\rho < N,$$

указанное выше для систем с ожиданием, оказывается излишним для систем с ограниченной очередью.

СО с ограниченной очередью: характеристики работы для N узлов обслуживания и S мест в очереди

Вероятность отсутствия требований в системе обслуживания P_0 определяется формулой

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)} \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho}{N}\right)^S\right)}.$$

Вероятность отказа $P_{отк}$ для системы с ограниченным накопителем определяется занятостью всех узлов обслуживания и равна:

$$P_{отк} = \frac{\rho^{N+S}}{N^S \cdot N!} \cdot P_0.$$

Относительная пропускная способность α есть величина, дополняющая вероятность отказа до 1:

$$\alpha = 1 - Pотк = 1 - \frac{\rho^{N+S}}{N^S \cdot N!} \cdot P_0.$$

Величина абсолютной пропускной способности A определяется формулой:

$$A = \lambda \times \alpha = \lambda \times (1 - P_{отк}).$$

Вероятность наличия очереди $P_{оч}$ определяется формулой:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)} \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho}{N}\right)^S\right) \cdot P_0.$$

Вероятность того, что все узлы заняты, $P_{зан}$, может быть вычислена следующим образом:

$$P_{зан} = \frac{\rho^N \left(N - \rho \cdot \left(\frac{\rho}{N} \right)^S \right)}{N!(N-\rho)} \cdot P_0 .$$

Среднее число требований, находящихся в системе обслуживания, $M_{тр}$:

$$M_{тр} = P_0 \left(\rho \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{(N+1)\cdot\rho^{N+1} - \rho^{N+2} - \frac{N+S+1}{N^S}\rho^{N+S+1} + \frac{N+S}{N^{S+1}}\cdot\rho^{N+S+2}}{(N-1)!(N-\rho)^2} \right).$$

Средняя длина очереди $M_{оч}$:

$$M_{оч} = P_0 \cdot \frac{\rho^N \left(\rho - \frac{S+1}{N^S}\cdot\rho^{S+1} + \frac{S}{N^{S+1}}\cdot\rho^{S+2} \right)}{(N-1)!(N-\rho)^2} .$$

Среднее число занятых узлов $M_{зан}$:

$$M_{зан} = P_0 \cdot \left(\rho \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\rho^N \left(N - \rho \cdot \left(\frac{\rho}{N} \right)^S \right)}{(N-1)!(N-\rho)} \right).$$

Среднее время ожидания начала обслуживания для требования, поступившего в систему $T_{ож}$:

$$T_{ож} = \frac{1}{N\nu} \cdot (M_{оч} + P_{зан}).$$

СО с ограниченной очередью: характеристики работы для 1 узла обслуживания и S мест в очереди

Рассмотрим еще один частный случай СМО с ограниченным накопителем, когда в системе работает один узел обслуживания. Число мест в накопителе произвольно. Возникающие при этом формулы получаются из общих формул подстановкой 1 вместо N с последующими преобразованиями.

Вероятность отсутствия требований в системе обслуживания P_0 определяется формулой:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{S+2}}.$$

Вероятность отказа $P_{отк}$ для системы с ограниченным накопителем определяется занятостью всех узлов обслуживания и равна:

$$P_{отк} = \frac{\rho^{S+1} - \rho^{S+2}}{1-\rho^{S+2}}.$$

Относительная пропускная способность α равна:

$$\alpha = = \frac{1-\rho^{S+1}}{1-\rho^{S+2}}.$$

Величина абсолютной пропускной способности A определяется формулой:

$$A = \lambda \cdot \alpha.$$

Вероятность наличия очереди $P_{оч}$ определяется формулой:

$$P_{оч} = \frac{\rho^2 - \rho^{S+2}}{1-\rho^{S+2}}.$$

Вероятность того, что все узлы заняты, $P_{зан}$, может быть вычислена следующим образом:

$$P_{зан} = \frac{\rho - \rho^{S+2}}{1-\rho^{S+2}}.$$

Среднее число требований, находящихся в системе обслуживания, $M_{тр}$:

$$M_{тр} = \frac{\rho - \rho^{S+2} \cdot (1+(S+1)\cdot(1-\rho))}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{S+2})}.$$

Средняя длина очереди $M_{оч}$:

$$M_{оч} = \frac{\rho^2 - \rho^{S+2} \cdot (1+S\cdot(1-\rho))}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{S+2})}.$$

Среднее число занятых узлов $M_{зан}$:

$$M_{зан} = P_{зан} = \frac{\rho \ - \rho^{S+2}}{1-\rho^{S+2}}.$$

Среднее время ожидания начала обслуживания для требования, поступившего в систему, $T_{ож}$:

$$T_{ож} = \frac{1}{\nu} \cdot (M_{оч} + P_{зан}).$$

СО с ограниченной очередью: характеристики работы для 1 узла обслуживания и 1 места в очереди

Рассмотрим, наконец, частный случай частного случая, когда в системе работает один узел обслуживания и в накопителе имеется одно место.

Вероятность отсутствия требований в системе обслуживания P_0 определяется формулой:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^3}.$$

Вероятность отказа $P_{отк}$ для системы с ограниченным накопителем определяется занятостью всех узлов обслуживания и равна:

$$P_{отк} = \rho^2 \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^3}.$$

Относительная пропускная способность α равна:

$$\alpha = \frac{1-\rho^2}{1-\rho^3}.$$

Величина абсолютной пропускной способности A:

$$A = \lambda \cdot \alpha.$$

Вероятность наличия очереди $P_{оч}$:

$$P_{оч} = \rho^2 \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^3}.$$

Вероятность того, что все узлы заняты, $P_{зан}$, может быть вычислена следующим образом:

$$P_{зан} = \rho \cdot \frac{1-\rho^2}{1-\rho^3}.$$

Среднее число требований, находящихся в системе обслуживания, $M_{тр}$:

$$M_{тр} = \rho \cdot \frac{1-3\rho^2+\rho^3}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^3)}.$$

Средняя длина очереди, $M_{оч}$, для рассматриваемого частного случая совпадает с вероятностью наличия очереди в системе:

$$M_{оч} = \rho^2 \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^3} = P_{ОЧ}.$$

Среднее число занятых узлов, $M_{зан}$, совпадает с вероятностью занятости узлов:

$$M_{зан} = P_{зан} = \rho \cdot \frac{1-\rho^2}{1-\rho^3}.$$

Среднее время ожидания начала обслуживания для требования, поступившего в систему, $T_{ож}$:

$$T_{ож} = \frac{1}{\nu} \cdot (M_{оч} + P_{зан}).$$

Качество работы СО

Большая часть приведенных выше характеристик работы систем обслуживания оценивает качество обслуживания с внешней точки зрения, с точки зрения клиентов системы. Так, вероятность очереди, средняя длина очереди, проведенное в очереди время важны для требований, прибывающих в СО с ожиданием. Вероятность отказа, пропускная способность системы существенны для требований, прибывающих в СО с возможными отказами.

С другой стороны, среднее число занятых (или свободных) узлов обслуживания характеризует степень загруженности работников системы, используемую производительность работников и отражает качество работы с внутренней точки зрения.

Увеличение числа узлов обслуживания, числа работников, занятых обслуживанием, способствует уменьшению очереди и усиливает привлекательность системы для клиентов. Однако это приводит к росту простоев узлов обслуживания, росту простоев работников, росту издержек и может оказаться неэффективным.

Принятие решений здесь связано с соизмерением дополнительных результатов и потерь в широком смысле слова. Один из возможных выходов – реорганизовать систему, придав ей черты системы другого типа. Например, в СО с отказами организовать ограниченный накопитель, чтобы поступившее требование могло дождаться начала обслуживания. Для СО с ожиданием попытаться организовать входящий поток с помощью расписания, предварительной записи на обслуживание.

Имитационные модели

Имитационное моделирование является мощным инструментом анализа сложных процессов с участием случайных событий. Оно позволяет многократно имитировать такие процессы при различных комбинациях случайных событий, анализировать накапливаемую статистику, разрабатывать и корректировать на этой основе управленческие решения. Мы рассмотрим возможности использования имитационного моделирования применительно к анализу работы систем обслуживания.

Имитационная модель системы обслуживания предназначена для выбора параметров организации системы обслуживания в условиях неопределенности и риска, в условиях, когда аналитические расчеты оказываются весьма трудоемкими или практически не реализуемыми.

С помощью генераторов случайных чисел в модели имитируется входящий поток требований на обслуживание, пребывание требований в накопителе, сам процесс обслуживания.

Для удобства работы с моделью исходные данные обычно группируют в отдельном блоке ячеек.

Результирующие показатели также группируют в отдельном блоке. Это позволяет достаточно просто проводить вариантный анализ и вырабатывать наиболее эффективные управленческие решения.

Работу модели полезно отобразить на диаграмме, это позволит придать анализируемому процессу необходимую наглядность.

Сама модель представляет собой соединение трех структурных звеньев:

- поступления требований,
- ожидания начала обслуживания в накопителе,
- собственно процесса обслуживания.

Входящий поток требований

Требования, приходящие в систему обслуживания, поступают в случайные, заранее не фиксированные моменты времени. Интервал времени между последовательными требованиями является случайной величиной, распределенной по тому или иному вероятностному закону.

В качестве такого закона обычно используется экспоненциальный закон распределения (таким образом, поток требований – пуассоновский). Экспоненциальный закон задается одним параметром – средней длиной интервала времени между соседними требованиями.

При необходимости закон поступления требований может быть выбран другим, требующим использования дополнительных параметров. Если требуется, дополнительные параметры для нового закона распределения вводятся в ячейки рядом с ячейкой среднего интервала времени между соседними требованиями. Возможен также и не случайный, регулярный поток требований, в котором интервалы времени между последовательными требованиями являются фиксированными величинами.

Накопитель (очередь)

Требования поступают в накопитель. Очередь обычно бывает упорядочена естественным образом, по дисциплине FIFO (первым пришел – первым поступаешь на обслуживание). Накопитель (очередь на обслуживание) может быть ограниченным, как по объему, так и по времени.

Ограничение накопителя по объему

Ограничение по объему задается в виде целого неотрицательного числа S. Это означает, что накопитель вмещает не более S требований, то есть длина очереди не может превышать S. Если накопитель полностью заполнен, то новое пришедшее требование получает отказ, не встает в очередь, и покидает систему не обслуженным. В качестве S в соответствующую ячейку может быть введено любое целое положительное число или 0.

Если в качестве S ввести число 0, то система обслуживания становится классической системой с отказами, системой без очереди.

Если в качестве S ввести достаточно большое число (например, компьютерную бесконечность, число 1E+30), то она превращается в классическую систему с ожиданием, систему, никогда не дающую отказов из-за ограниченности накопителя.

Ограничение накопителя по времени

Ограничение накопителя по времени соответствует очереди с нетерпеливыми требованиями. Требование, прождав некоторое время в накопителе, может «потерять терпение» и покинуть очередь. Время терпеливого ожидания предполагается различным для разных требований. Это случайная величина со своим законом распределения. Обычно используют экспоненциальный закон. Экспоненциальный закон задается одним параметром – средним временем терпеливого ожидания.

Закон распределения может быть выбран и другим. Если требуется ввести дополнительные параметры для нового закона распределения, это может быть сделано рядом с ячейкой среднего времени терпеливого ожидания. Может быть введено и фиксированное (не случайное) время терпеливого ожидания. Если, например, такое фиксированное время равно 0, то требование вообще отказывается ждать. Это соответствует классической системе с отказами. Если же такое время достаточно велико (например, 1E+30), то получаем модель с неограниченным временем ожидания.

Таким образом, в общем случае требование может уйти из накопителя, не дождавшись начала обслуживания.

Узлы обслуживания

Каждое требование обслуживается одним узлом (если требование вообще доходит до обслуживания). Каждый узел обслуживает одновременно только одно требование (если он в это время не простаивает, а занят обслуживанием). Узлы обслуживания работают параллельно. В модели предполагается несколько стандартных вариантов выбора количества параллельно работающих узлов (например, от 1 до 5), но число узлов обслуживания может быть расширено. Продолжительность обслуживания является случайной величиной. Обычно в качестве закона распределения этой величины выбирается экспоненциальный закон. Экспоненциальный закон задается одним параметром – средним временем обслуживания. Для разных узлов среднее время обслуживания может быть различным, то есть разные узлы могут работать с разной интенсивностью.

Закон распределения может быть выбран и другим. Если требуется ввести дополнительные параметры для нового закона распределения, это может быть сделано рядом с ячейками среднего времени обслуживания. Можно ввести и не случайное время обслуживания, когда продолжительность обслуживания будет заранее известной фиксированной величиной.

В модели обычно предполагается, что освободившиеся узлы приступают к обслуживанию новых требований в порядке своего освобождения. То есть узел, освободившийся раньше, раньше и приступает к новому обслуживанию. При необходимости этот порядок быть изменен.

Блок обработки статистических данных

Имитационные модели должны быть снабжены ***Статистическим блоком***, позволяющим обобщать итоги моделирования и анализировать полученные результаты. Такой статистический блок состоит из трех строк.

Первая строка «За текущий период времени» содержит данные по результатам последнего акта имитации.

Во второй строке «В сумме за все периоды» суммируются данные за все прошедшие акты имитации. Эта строка содержит ячейки с циклическими ссылками.

В третьей строке «В среднем за один период» проводится усреднение полученных результатов по всем прошедшим актам имитации. Третья строка и дает основную информацию для дальнейшего анализа.

Статистика и оценка качества

Столбцы Статистического блока соответствуют показателям, характеризующим качество работы системы. Качество оценивается с двух сторон.

С внешней стороны, со стороны требований на обслуживание, поступающих в систему, соответствующими показателями являются общее и среднее время, проведенное требованиями в очереди. Высокое качество работы, с точки зрения клиентов, требует минимизации времени ожидания.

С внутренней стороны, характеризующей степень загруженности системы, таким показателем является время простоя узлов обслуживания. Хорошее качество работы, с точки зрения руководства системы, соответствует высокой загруженности работников.

Эти две стороны оценки качества работы находятся в противоречии: улучшая положение по одной, мы ухудшаем положение по другой. Совершенствование работы системы обслуживания требует эффективной балансировки таких оценок.

Подготовка модели к работе

Для корректной работы имитационных моделей в Excel необходимо установить соответствующие параметры. Для этого следует пройти по цепочке *Сервис \ Параметры... \ Вычисления* и в конце сделать следующие действия:

- поставить флаг (птичку) в окошке *Итерации*,
- поставить 1 в окошке *Предельное число итераций* (по умолчанию там стоит 100).

Теперь каждое нажатие на клавишу F9 приводит к пересчету всех случайных чисел и всего, что от них зависит. Таким образом, каждое отдельное нажатие на F9 соответствует отдельному акту имитации и моделирует отдельный период работы системы обслуживания. Последовательное многократное нажатие на F9 соответствует компьютерной имитации работы.

Ниже описан сформированный нами вариант имитационной модели обслуживания, предназначенный для проведения различных компьютерных экспериментов по выбору вариантов параметров системы и дальнейшей отладке ее работы.

Имитационная модель системы обслуживания

Модель системы обслуживания представлена на трех листах книги Excel.

На первом листе содержится блок ячеек с исходными данными (параметрами модели), блок обработки итоговой статистики по результатам имитационных экспериментов, блок оценки эффективности работы системы (рис. 4.8).

На втором листе построена собственно модель и дополнительные расчеты, необходимые для дальнейшего анализа (рис. 4.9–4.10).

На третьем листе построена диаграмма, отображающая поступление требований, их простаивание в очереди и дальнейшее обслуживание (рис. 4.11).

1. Лист исходных данных, статистики и оценки результатов

На этом листе (рис. 4.8) представлены три блока данных:

– блок исходных данных для работы модели,

– блок обработки статистики модели,

– блок оценки эффективности работы системы при различных вариантах исходных данных.

1.1. Блок исходных данных модели

Время начала и окончания работы системы обслуживания

В отдельных ячейках вводится начало и окончание работы (рабочего дня) системы обслуживания. По умолчанию задано начало работы в 9:00, окончание в 18:00. Пользователем могут быть введены другие данные в соответствующие ячейки. На втором листе, возможно, потребуется протянуть вниз последнюю строку таблицы, чтобы рабочий день системы был охвачен расчетами. Возможно, следует подправить на диаграмме максимальное и минимальное значение в формате горизонтальной оси.

Число узлов обслуживания

Пользователем может быть введено в соответствующую ячейку любое число от 1 до 5. При этом те узлы из первоначальных пяти, которые оказываются лишними, выделяются условным форматом (красным цветом) и в дальнейших расчетах участия не принимают.

Если требуется ввести большее число узлов обслуживания, то необходимо модифицировать модель следующим образом. Следует ввести дополнительные строки на первом листе для средней продолжительности обслуживания. Следует ввести дополнительные столбцы в блоке статистики на первом листе. Следует ввести дополнительные столбцы в самой модели на втором листе (в двух местах). Строки и столбцы рекомендуется вводить между имеющимися (это позволит минимально корректировать формулы). На новые строки (столбцы) следует протянуть уже имеющиеся соседние данные.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**Исходные данные (параметры) модели**								**Оценка эффективности работы системы**					
2	**Рабочий день**			**Требования**					**Исходные данные по затратам (убыткам)**					
3	Начало работы	9:00		Средний интервал между требованиями			0:01:00		**Средние потери от не обслуженного требования (руб./треб.)**					**10**
4	Конец работы	18:00		Среднее время терпеливого ожидания			0:05:00		**Затраты на работу узла обслуживания (руб. / час)**					**50**
5														
6	**Узлы обслуживания**			**Накопитель (очередь)**					**Анализ результатов имитации**					
7	**Кол-во (от 1 до 5)**	**3**		Объем накопителя			**6**		**Общие убытки от ухода не обслуж. требований (руб./час)**					**250**
8									**Затраты на работу всех узлов обслуживания (руб./час)**					**150**
9	**Среднее время обслуживания 1 требования**								***Суммарные затраты (руб./час)***					***400***
10	**Номер узла**	**Время**												
11	1	0:04												
12	2	0:05												
13	3	0:06												
14	~~4~~	~~0:05~~												
15	~~5~~	~~0:05~~												
16														
17		**Статистические результаты компьютерной имитации**												
18	***Обновление***	***СТАТИСТИКА***												
19	***Для сброса статистики введите 1***	***Дни***	***Узлы обслуживания***							***Требования***				
20			***Время простоя узла***					**Сумм. простой**	**Ср. % простоя узла**	**Число пришедших**	**Число обслуженных**	**Пропускная способность**	**Простой в очереди**	**Ср. время в очереди**
21			**1**	**2**	**3**	~~**4**~~	~~**5**~~							
22	**В данный день**	1	1:08:40	0:52:30	0:50:43	~~0:00:00~~	~~0:00:00~~	2:51:54	11%	517	299	58%	16:16:42	0:03:16
23	**В сумме за все дни**	16	12:22:11	10:41:51	9:22:06	~~0:00:00~~	~~0:00:00~~	32:26:08	120%	8539	4940	927%	274:29:42	0:53:42
24	**В среднем за день**	1	0:46:23	0:40:07	0:35:08	~~0:00:00~~	~~0:00:00~~	2:01:38	8%	534	309	58%	17:09:21	0:03:21

Рис. 4.8. Лист исходных данных, обработки статистики и оценки результатов

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Модель обслуживания с ограниченным накопителем и нетерпеливыми требованиями													
2														
3	**Начало**	**Требования (вход)**				**Очередь**						**Обслуживание**		
4	Возм. начало	N треб.	Слчис интервала	Интервал	Приход	Длина очереди	Слчис времени терпения	Время терпения	Будет ли обслуж.	Начало обслуж.	Уход из очереди	Узел обслуж.	Слчис длит. обслуж.	Длит-ность обслуж.
5					9:00:00									
6	9:00:00	1	0,55680	0:00:35	9:00:35	0	0,33436	0:05:29	1	9:00:35	9:00:35	1	0,98489	0:00:04
7	9:00:00	2	0,53364	0:00:38	9:01:13	0	0,86247	0:00:44	1	9:01:13	9:01:13	2	0,51980	0:03:16
8	9:00:00	3	0,06049	0:02:48	9:04:01	0	0,15134	0:09:26	1	9:04:01	9:04:01	3	0,52185	0:03:54
9	9:00:39	4	0,26913	0:01:19	9:05:20	0	0,29609	0:06:05	1	9:05:20	9:05:20	1	0,07783	0:10:13
10	9:04:29	5	0,32786	0:01:07	9:06:27	0	0,55106	0:02:59	1	9:06:27	9:06:27	2	0,21884	0:07:36
11	9:07:55	6	0,16682	0:01:47	9:08:14	0	0,46950	0:03:47	1	9:08:14	9:08:14	3	0,12701	0:12:23
12	9:14:03	7	0,55990	0:00:35	9:08:49	1	0,57740	0:02:45	0		9:11:34		0,89201	
13	9:14:03	8	0,96916	0:00:02	9:08:51	2	0,60941	0:02:29	0		9:11:20		0,22051	
14	9:14:03	9	0,35793	0:01:02	9:09:53	3	0,84140	0:00:52	0		9:10:44		0,62242	
15	9:14:03	10	0,40717	0:00:54	9:10:46	3	0,98443	0:00:05	0		9:10:51		0,26233	
16	9:14:03	11	0,00793	0:04:50	9:15:37	0	0,56342	0:02:52	1	9:15:37	9:15:37	2	0,54176	0:03:04
17	9:15:33	12	0,07572	0:02:35	9:18:12	0	0,82288	0:00:58	1	9:18:12	9:18:12	1	0,71274	0:01:21
18	9:18:41	13	0,82107	0:00:12	9:18:23	1	0,05326	0:14:40	1	9:18:41	9:18:41	2	0,30482	0:05:56
19	9:19:33	14	0,97283	0:00:02	9:18:25	2	0,81822	0:01:00	0		9:19:25		0,97625	
20	9:19:33	15	0,40251	0:00:55	9:19:20	2	0,00175	0:31:45	1	9:19:33	9:19:33	1	0,39320	0:03:44
21	9:20:37	16	0,29428	0:01:13	9:20:33	1	0,78836	0:01:11	1	9:20:37	9:20:37	3	0,74011	0:01:48
22	9:22:25	17	0,31758	0:01:09	9:21:42	1	0,81880	0:01:00	1	9:22:25	9:22:25	3	0,64095	0:02:40
23	9:23:17	18	0,20923	0:01:34	9:23:16	1	0,99696	0:00:01	0		9:23:17		0,34382	
24	9:23:17	19	0,03953	0:03:14	9:26:30	0	0,90347	0:00:30	1	9:26:30	9:26:30	1	0,22941	0:05:53
25	9:24:37	20	0,40253	0:00:55	9:27:24	0	0,24979	0:06:56	1	9:27:24	9:27:24	2	0,36175	0:05:05
26	9:25:06	21	0,44334	0:00:49	9:28:13	0	0,90951	0:00:28	1	9:28:13	9:28:13	3	0,49560	0:04:13
27	9:32:23	22	0,21112	0:01:33	9:29:46	1	0,51367	0:03:20	1	9:32:23	9:32:23	1	0,92651	0:00:18

Рис. 4.9. Левая часть листа модели

	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
1														
2							Время простоя							
3	Узлы освобождаются (выход)					Конец	Узлы обслуживания					Треб-ния		
4	1	2	3	~~4~~	~~5~~	Раннее окончание	1	2	3	~~4~~	~~5~~	Время в очереди	**Признак конца раб. дня**	Выход обслуж. требований
5	9:00:00	9:00:00	9:00:00	~~18:00:00~~	~~18:00:00~~	9:00:00								
6	9:00:39	9:00:00	9:00:00	18:00:00	18:00:00	9:00:00	0:00:35	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:00:39
7	9:00:39	9:04:29	9:00:00	18:00:00	18:00:00	9:00:00	0:00:00	0:01:13	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:04:29
8	9:00:39	9:04:29	9:07:55	18:00:00	18:00:00	9:00:39	0:00:00	0:00:00	0:04:01	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:07:55
9	9:15:33	9:04:29	9:07:55	18:00:00	18:00:00	9:04:29	0:04:41	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:15:33
10	9:15:33	9:14:03	9:07:55	18:00:00	18:00:00	9:07:55	0:00:00	0:01:58	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:14:03
11	9:15:33	9:14:03	9:20:37	18:00:00	18:00:00	9:14:03	0:00:00	0:00:00	0:00:19	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:20:37
12	9:15:33	9:14:03	9:20:37	18:00:00	18:00:00	9:14:03	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:02:45	1	
13	9:15:33	9:14:03	9:20:37	18:00:00	18:00:00	9:14:03	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:02:29	1	
14	9:15:33	9:14:03	9:20:37	18:00:00	18:00:00	9:14:03	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:52	1	
15	9:15:33	9:14:03	9:20:37	18:00:00	18:00:00	9:14:03	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:05	1	
16	9:15:33	9:18:41	9:20:37	18:00:00	18:00:00	9:15:33	0:00:00	0:01:34	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:18:41
17	9:19:33	9:18:41	9:20:37	18:00:00	18:00:00	9:18:41	0:02:39	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:19:33
18	9:19:33	9:24:37	9:20:37	18:00:00	18:00:00	9:19:33	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:17	1	9:24:37
19	9:19:33	9:24:37	9:20:37	18:00:00	18:00:00	9:19:33	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:01:00	1	
20	9:23:17	9:24:37	9:20:37	18:00:00	18:00:00	9:20:37	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:13	1	9:23:17
21	9:23:17	9:24:37	9:22:25	18:00:00	18:00:00	9:22:25	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:04	1	9:22:25
22	9:23:17	9:24:37	9:25:06	18:00:00	18:00:00	9:23:17	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:44	1	9:25:06
23	9:23:17	9:24:37	9:25:06	18:00:00	18:00:00	9:23:17	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:01	1	
24	9:32:23	9:24:37	9:25:06	18:00:00	18:00:00	9:24:37	0:03:13	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:32:23
25	9:32:23	9:32:29	9:25:06	18:00:00	18:00:00	9:25:06	0:00:00	0:02:47	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:32:29
26	9:32:23	9:32:29	9:32:26	18:00:00	18:00:00	9:32:23	0:00:00	0:00:00	0:03:07	0:00:00	0:00:00	0:00:00	1	9:32:26
27	9:32:41	9:32:29	9:32:26	18:00:00	18:00:00	9:32:26	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:02:37	1	9:32:41

Рис. 4.10. Правая часть листа модели

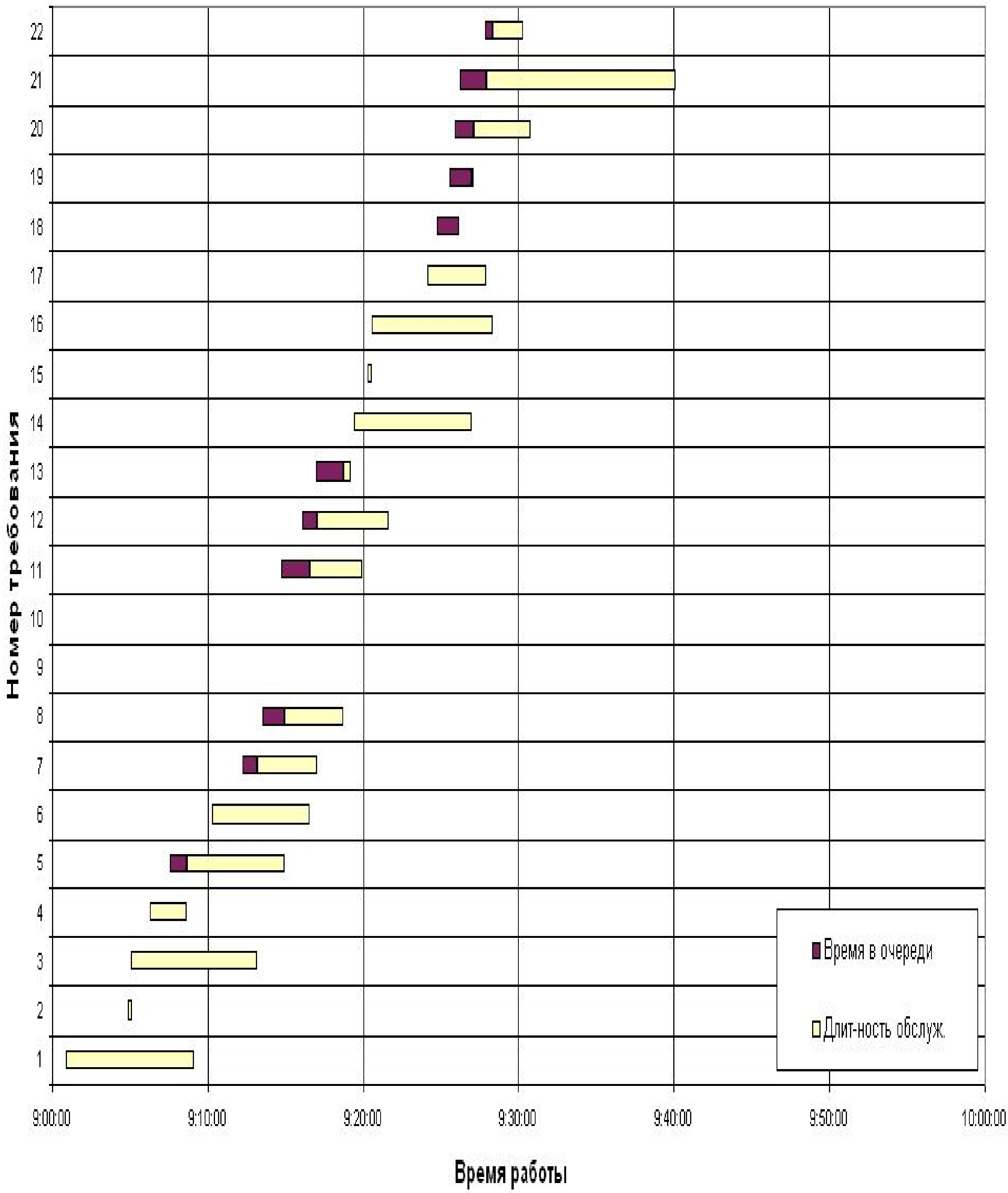


Рис. 4.11. Диаграмма прихода, ожидания и обслуживания требований

Среднее время обслуживания одного требования

В соответствующие ячейки вводится средняя продолжительность обслуживания узлом одного требования. Для разных узлов обслуживания могут быть введены разные средние значения. Данные для узлов, не включенных в работу, автоматически выделяются красным цветом и в дальнейших расчетах не участвуют.

Средний интервал между требованиями

В соответствующую ячейку вводится величина среднего интервала времени между последовательными требованиями входящего потока.

Среднее время терпеливого ожидания

Требования предполагаются нетерпеливыми. Возможен уход требований из накопителя (очереди) до начала обслуживания. В соответствующую ячейку вводится величина среднего времени терпеливого ожидания в очереди.

Вероятностные характеристики

В модели по умолчанию предполагается экспоненциальное распределение вероятностей всех случайных величин. К таким случайным величинам относятся следующие:

– интервалы времени между последовательными приходами требований,

– длительности обслуживания требований,

– время терпеливого ожидания начала обслуживания (до ухода требования из очереди без обслуживания).

Экспоненциальное распределение задается одним параметром – своим средним значением. Такие значения указаны в соответствующих ячейках блока исходных данных. Эти значения могут быть заменены другими. На изменения средних значений модель отреагирует автоматически.

Сам тип распределения тоже может быть изменен, причем для разных случайных величин по-разному. Такое изменение потребует более существенной, но не сложной модификации самой модели.

Если новое распределение требует дополнительных параметров, то их полезно ввести в блоке исходных данных рядом со средними значениями. Затем следует произвести изменения на втором листе, где сформирована сама модель. Здесь следует изменить в соответствующих столбцах расчетные формулы в соответствии с новым типом распределения.

Как частный случай, можно вместо некоторых (или вместо всех) случайных величин ввести фиксированные значения.

Объем накопителя

Объем накопителя предполагается ограниченным. В соответствующую ячейку вводится целое неотрицательное число – величина этого объема. Она определяет максимальное число требований, помещающихся в накопителе. Если требование приходит в систему в момент, когда все места в накопителе заняты, то оно получает отказ и уходит из системы не обслуженным.

В частности, если объем накопителя положить равным 0, то получим классическую систему обслуживания с отказами, в которой очередь невозможна. Если же объем накопителя сделать бесконечно большим (ввести в соответствующую ячейку число 1Е+30), то получим классическую систему обслуживания с ожиданием, в которой невозможны отказы по причине ограниченности накопителя (но попрежнему возможен уход из-за нетерпеливости требований).

1.2. Блок «Статистика»

В этом блоке представлена обработка результатов имитационного эксперимента. В расчетах блока «Статистика» участвуют три строки.

Строка «В данный день»

В строке «В данный день» сведены показатели, отражающие ключевые результаты расчета Модели 2 на третьем листе книги.

При нажатии на клавишу F9 модель пересчитывается, новые результаты таблицы соответствуют новому рабочему дню, и эти новые результаты замещают прежние в строке «В данный день».

Строка «За все дни»

В строке «За все дни» суммируются и накапливаются результаты расчетов по всем прошедшим дням. В частности, в крайней левой ячейке «Дни» автоматически подсчитывается число дней эксперимента. В формулах данной строки используется циклическая ссылка.

Для того чтобы Excel корректно работал с циклической ссылкой, следует пройти по цепочке: Меню *Сервис – Параметры* – Вкладка *Вычисления* и там поставить флаг (птичку) в поле *Итерации*, а в поле *Предельное число итераций* с клавиатуры поставить число 1 (вместо стоящего там по умолчанию числа 100). Затем нажать кнопку ОК.

Строка «В среднем за день»

В строке «В среднем за день» полученные данные усредняются. Суммарные данные делятся на количество дней, прошедших в эксперименте. Полученные результаты усреднения являются ключевыми для дальнейшего анализа.

Работа блока «Статистика»

Каждый раз при нажатии на клавишу F9 пересчитывается модель. В соответствии с этим изменяется строка «В данный день». Эта строка добавляется к уже имеющимся данным строки «За все дни». Обновленная строка «За все дни» усредняется в строке «В среднем за день».

Таким образом, каждый раз первая строка дает результаты текущего дня, вторая строка дает накопленные результаты за все прошедшие дни, а третья строка дает средние результаты за все прошедшие дни.

Продолжительность имитационного эксперимента

Для получения полезного результата в эксперименте должно пройти достаточно много дней, то есть следует нажать на клавишу F9 достаточно много раз. В принципе, чем больше, тем лучше.

Необходимое число нажатий можно визуально определить следующим образом. Будем следить за изменениями в третьей строке «В среднем за день». Когда данные этой строки станут достаточно стабильными (перестанут изменяться с удовлетворяющей нас степенью точности), нажатия на F9 можно прекратить.

Сброс блока «Статистика» для начала нового эксперимента

После изменения исходных данных (например, числа работающих узлов обслуживания) сбор данных по имитационному эксперименту следует начать сначала.

Для сброса статистики на начало очистите ячейку A20 (или введите в нее число 0). В результате во всех трех строках блока «Статистика» должны появиться одинаковые данные.

Для начала нового накопления статистики следует ввести в ячейку A20 число 1. После этого можно начинать эксперимент сначала, последовательно нажимая на клавишу F9.

1.3. Оценка качества работы и поиск эффективных решений

Оценка качества

Качество работы системы обслуживания оценивается с двух сторон.

Со стороны требований (клиентов системы) система работает хорошо, если характеристики, связанные с очередью и отказами в работе, являются достаточно приемлемыми. В хорошо работающей системе очередь в среднем невелика, время ожидания достаточно мало, накопитель велик, пребывание в нем можно терпеть, отказы в обслуживании возникают редко. Затраты, связанные с работой системы, клиентов обычно не интересуют.

С точки же зрения учредителей системы, несущих затраты по ее работе, в хорошо работающей системе эти затраты должны быть невелики.

Эти две стороны оценки эффективности обычно противоречат друг другу и нуждаются в согласовании.

Например, если число параллельно работающих узлов обслуживания мало, то затраты по работе системы будут невелики, но система, возможно, будет плохо справляться с потоком требований на обслуживание. Если же увеличить число работающих узлов, то уменьшится очередь и отказы в обслуживании, но зато увеличатся затраты.

Поиск эффективных решений

Имитационная модель позволяет найти эффективные решения.

На листе исходных данных приведен вариант анализа данных для принятия решений по определению числа работающих узлов обслуживания.

В ячейки «Средние потери от не обслуженного требования (руб./треб.)» и «Затраты на работу узла обслуживания (руб./час)» вводятся соответствующие исходные данные.

В ячейке «Затраты на работу всех узлов обслуживания (руб./час)» рассчитываются затраты на все узлы, включенные в работу. В ячейке «Общие убытки от ухода не обслуженных требований (руб./час)», рассчитываются данные по результатам работы имитационной модели. В ячейке «Суммарные затраты (руб./час)» суммируются общие затраты (убытки) по двум предыдущим ячейкам. Эта ячейка соответствует критерию эффективности работы системы в целом.

Если увеличить число узлов обслуживания, то затраты на работу системы возрастут, но зато убытки от не обслуженных требований уменьшатся. Если уменьшить число узлов обслуживания, то наоборот, затраты на работу системы уменьшатся, но зато убытки от не обслуженных требований возрастут. Следует определить эффективное число узлов обслуживания, соответствующее наименьшим суммарным затратам.

Определение эффективного числа узлов обслуживания производится по следующей схеме.

Выбирается какой-то вариант числа работающих узлов обслуживания. Для этого варианта набирается статистика в блоке «Статистика» (перед этим блок «Статистика» сбросить на начало). В ячейке «Суммарные затраты (руб./час)» определяются суммарные затраты для данного варианта.

Затем вводится другой вариант числа работающих узлов обслуживания. Статистика в блоке «Статистика» опять сбрасывается на начало и набирается снова. Сравниваются два варианта суммарных затрат. Эффективнее тот вариант, в котором суммарные затраты меньше. Так, перебором вариантов, находится эффективное число работающих узлов обслуживания.

В такие расчеты могут быть включены и другие данные. Например, потери системы от простаивания требований в очереди (даже если они не уходят из накопителя, а доходят до начала обслуживания). Или затраты на расширение накопителя, а также затраты на организацию более комфортных условий ожидания (чтобы требования стали более терпеливыми). Или дополнительные затраты на ускорение процесса обслуживания теми же узлами. Или затраты на привлечение дополнительных требований (уменьшение среднего времени между требованиями).

Это позволяет применить нашу расчетную схему к поиску эффективных решений по различным направлениям совершенствования работы системы обслуживания.

2. Лист Модели

Модель представляет собой расчетную таблицу. Ее верхний фрагмент представлен на рис. 4.9–4.10. Дальнейшая часть таблицы получается протягиванием строки верхней части вниз по листу Excel.

Формулы этой таблицы используют исходные данные, расположенные на первом листе книги. В свою очередь, на эти формулы опираются расчеты в блоке «Статистика», расположенном на том же первом листе книги.

Строки модельной таблицы

Начальная строка модельной таблицы использована для ввода условий, связанных с началом работы системы обслуживания. Остальные строки таблицы соответствуют поступающим требованиям. Требования нумеруются в порядке поступления, порядковые номера требований введены во втором столбце «N треб».

Границы рабочего дня введены в блоке исходных данных на первом листе книги. В соответствии с ними, возможно, потребуется протянуть последнюю строку модельной таблицы вниз. Это необходимо сделать для того, чтобы требования, поступающие в течение рабочего дня, получили свои номера и свои строки в этой таблице.

Поскольку поток требований является случайным, определить заранее точное число строк не представляется возможным. Таблицу необходимо протянуть вниз с запасом.

Столбцы модельной таблицы

Рассмотрим содержание столбцов модельной таблицы. Столбцы соответствуют характеристикам работы модели.

A. В первом столбце «Возм. начало» рассчитывается время возможного начала обслуживания очередного требования. Оно определяется по моменту освобождения одного из узлов обслуживания (первого из освобождающихся). Это самое раннее окончание работы узла рассчитывается далее в столбце «Раннее окончание» и из предыдущей строки переносится в текущую ячейку первого столбца таблицы.

B. В столбце «N треб». нумеруются входящие требования на обслуживание.

C. В столбце «Слчис интервала» введен генератор случайных чисел для определения длины интервала между моментами поступления соседних требований.

D. В столбце «Интервал» с помощью датчика случайных чисел, работающего в предыдущем столбце, и на основе экспоненциального распределения моделируется интервал между последовательными требованиями, поступающими в систему.

Вместо экспоненциального можно использовать и другие типы вероятностного распределения. В этом случае в столбце «Интервал» следует ввести формулу, соответствующую другому типу вероятностного распределения и переводящую случайные числа в длину интервала в соответствии с этим выбранным новым типом распределения. Например, для нормального распределения при этом следует воспользоваться функцией НОРМОБР. Для равномерного распределения следует использовать линейное преобразование случайного числа.

В любом варианте параметры такого нового распределения следует указать в блоке исходных данных на первом листе книги, выделив для этого, если потребуется, дополнительные ячейки.

Может быть введена и формула для фиксированной длины интервала между требованиями. В этом случае требования будут поступать регулярно, через фиксированные промежутки времени, как по конвейеру. Это фиксированное время будет равно средней длине интервала, указанной в соответствующей ячейке блока исходных данных.

E. В столбце «Приход» моделируется приход требований в систему.

F. В столбце «Длина очереди» рассчитывается длина очереди. В этот расчет включается и само поступившее требование в том случае, если все узлы обслуживания заняты, так что оно действительно должно стать в очередь.

G. В столбце «Слчис времени терпения» введен генератор случайных чисел для определения времени терпения ожидания начала обслуживания.

H. В столбце «Время терпения» определяется время терпеливого ожидания для поступившего требования. Если длина очереди, включающая данное требование, превышает заданный объем накопителя, то время терпения этого требования равно 0. Таким образом, в этом случае требование мгновенно покидает накопитель. Если же длина очереди, включающая данное требование, не превышает заданный объем накопителя, то время терпения этого требования является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Формула в ячейках столбца на основе датчика случайных чисел предыдущего столбца моделирует экспоненциальное распределение.

Вместо экспоненциального можно использовать и другие типы вероятностного распределения. В этом случае в столбце «Время терпения» следует ввести формулу, соответствующую другому типу вероятностного распределения и переводящую случайные числа в срок терпения в соответствии с этим выбранным новым типом распределения.

Параметры такого нового распределения следует указать в блоке исходных данных на первом листе книги, выделив для этого, если потребуется, дополнительные ячейки.

Может быть введена и формула для фиксированного времени терпения. В этом случае требования будут фиксированное время терпеливо ждать начала обслуживания, после чего уходить из накопителя, если обслуживание еще не началось. Это фиксированное время будет равно среднему времени терпеливого ожидания, указанному в соответствующей ячейке блока исходных данных.

I. В столбце «Будет ли обслужен» для каждого требования по времени его поступления, времени терпеливого ожидания и расчетному моменту начала обслуживания определяется, дождется ли данное требование начала обслуживания. В соответствии с этим в ячейке столбца возникает 1 или 0.

J. В столбце «Начало обслуж.» для тех требований, которые попадают на обслуживание (в предыдущем столбце стоит 1), определяется момент начала обслуживания. Для тех же требований, которые не попадают на обслуживание (в предыдущем столбце стоит 0), вставляется пустой текст.

K. В столбце «Уход из очереди» определяется момент ухода требования из очереди. Этот момент связан с началом обслуживания или же с концом терпеливого ожидания в накопителе.

L. В столбце «Узел обслуж.» для тех требований, которые попадают на обслуживание, определяется номер узла, который будет обслуживать данное требование. Для остальных требований вставляется пустой текст.

Определение номера узла обслуживания использует функцию ПОИСКПОЗ.

M. В столбце «Слчис длит. обслуж.» введен генератор случайных чисел для определения продолжительности обслуживания требования.

N. В столбце «Длит-ность обслуж.» определяется длительность обслуживания данного требования. Продолжительность обслуживания является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Формула в ячейках столбца на основе датчика случайных чисел предыдущего столбца моделирует экспоненциальное распределение. Разные узлы обслуживания могут обладать разной интенсивностью работы, в соответствии со средним временем обслуживания, указанным в блоке исходных данных на первом листе книги. Определение соответствующей средней длительности использует функцию ИНДЕКС.

Вместо экспоненциального можно использовать и другие типы вероятностного распределения. В этом случае в столбце «Длительность обслуживания» следует ввести формулу, соответствующую другому типу вероятностного распределения и переводящую случайные числа в длительность в соответствии с этим выбранным новым типом распределения.

Параметры такого нового распределения следует указать в блоке исходных данных на первом листе книги, выделив для этого, если потребуется, дополнительные ячейки.

Может быть введена и формула для фиксированной длительности обслуживания. В этом случае требования будут обслуживаться фиксированное время. Это фиксированное время будет равно среднему времени обслуживания, указанному в соответствующей ячейке блока исходных данных на первом листе книги.

O, P, Q, R, S. В столбцах «1», «2», «3», «4», «5» раздела «Узлы освобождаются (выход)» указывается время освобождения соответствующего узла обслуживания, то есть время окончания его работы над данным требованием, если именно этот узел обслуживает данное требование. Если же данное требование обслуживается другим узлом, то в ячейке воспроизводится предшествующее время. В этом случае условное форматирование окрашивает шрифт в белый цвет, так что данные в ячейке становятся невидимыми.

Если узел не включен вообще в работу системы (если число узлов обслуживания, указанное в блоке исходных данных на первом листе книги, меньше номера этого узла), то условное форматирование окрашивает номер узла и начальное время в красный цвет. Такие узлы не участвуют в обслуживании требований.

T. В столбце «Раннее окончание» определяется наиболее раннее время окончания работы среди узлов обслуживания. Это раннее время окончания переходит в следующей строке в данные первого столбца таблицы, столбца «Возм. начало». Неработающие узлы не могут при этом давать раннего времени окончания, и тем самым автоматически исключаются из дальнейших расчетов.

Далее в столбцах таблицы рассчитывается время простоя, отдельно для каждого из узлов обслуживания и для требований. Простой для требований соответствует времени, проведенному в очереди на обслуживание.

На эти столбцы не опираются дальнейшие расчеты в данной модельной таблице. Их результаты используются в блоке «Статистика» на первом листе книги.

U, V, W, X, Y. В столбцах «1», «2», «3», «4», «5» подраздела «Узлы обслуживания» раздела «Время простоя» рассчитывается время простоя соответствующего узла.

Если время простоя узла равно 0, то условное форматирование окрашивает шрифт в белый цвет, так что данные в ячейке становятся невидимыми.

Z. В столбце «Время в очереди» подраздела «Требования» раздела «Время простоя» рассчитывается время пребывания требований в очереди. При этом такое время учитывается как для требований, дождавшихся начала обслуживания, так и для требований, ушедших из накопителя до начала обслуживания из-за истечения времени терпения.

Если время в очереди равно 0, то условное форматирование окрашивает шрифт в белый цвет, так что данные в ячейке становятся невидимыми.

AA. В столбце «Признак конца раб. дня» введена формула, дающая в качестве результата 1 или 0. Она дает 1, если требование, соответствующее данной строке, поступает до окончания рабочего дня. Формула дает 0 в противном случае. Здесь поставлены условные форматы, выделяющие значения 0 или 1.

Как ввести дополнительные узлы обслуживания

Если необходимо ввести в систему большее число узлов обслуживания, чем предусмотренные первоначально 5 узлов, то следует ввести в модель недостающие узлы. Для этого следует ввести дополнительные строки в блоке исходных данных на первом листе книги и ввести там номера узлов и среднее время обслуживания для этих новых узлов. Кроме того, необходимо ввести дополнительные столбцы на первом листе книги, в блоке «Статистика».

На втором листе книги, в таблицу Модели, в двух местах, в группе столбцов **O, P, Q, R, S** и в группе столбцов **U, V, W, X, Y**, следует ввести дополнительные столбцы и протянуть на все эти новые столбцы формулы соседних, уже заполненных столбцов.

Такие строки и столбцы рекомендуется вводить не после уже существующих, а между ними, то есть между столбцами «1» и «5», с последующим их переименованием. При таком способе аргументы в функциях ПОИСКПОЗ и ИНДЕКС, участвующие в расчетах, изменятся корректно автоматически. В противном же случае их придется корректировать вручную.

В любом случае полезно после ввода новых строк и столбцов проверить, что эти две функции, участвующие в расчетах в столбцах **J** и **K**, корректно охватывают новые данные.

3. Лист диаграммы

На третьем листе книги в виде линейчатой диаграммы отображены моменты поступления требований, время простаивания в очереди и время обслуживания (рис. 4.11).

Диаграмма призвана придать имитационной модели необходимую наглядность. Она перестраивается при каждом нажатии на клавишу F9.

Диаграмма отображает данные модельной таблицы, то есть данные текущего рабочего дня. Если для начала и окончания рабочего дня выбраны новые границы, то следует ввести соответствующие изменения в максимальное и минимальное значение горизонтальной оси диаграммы.

Задания 4.3

1. Постройте описанную модель. Приведенные результаты вычислений могут расходиться с вашими, поскольку зависят от случайных чисел.

2. Проведите 100 актов имитации (нажатий на клавишу F9). Сформулируйте выводы о качестве работы системы.

3. Проведите еще 100 актов имитации. Насколько устойчивы полученные ранее выводы?

4. Измените параметры моделей. Измените число узлов обслуживания, уменьшите среднюю величину интервала между требованиями, увеличьте среднюю длительность обслуживания. Попробуйте сами и другие варианты изменений.

Проведите имитацию. Как внесенные изменения сказались на результатах работы системы?

5. Подберите параметры модели под ту ситуацию, которая интересна вам. Проведите имитацию.

Библиографический список

1. Абчук В.А. Экономико-математические методы. – СПб., 1999.
2. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. – М., 2001.
3. Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследования операций: Учебное пособие. – М., 2006.
4. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование экономических систем. – М., 2000.
5. Гаврилов Д.А. Управление производством на базе стандарта MRP II. – СПб., 2002.
6. Глудкин О.П., Горбунов Н.М., Гуров А.И., Зорин Ю.В. Всеобщее управление качеством. – М., 1999.
7. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб., 2007.
8. Громова Н.Б., Минько Э.В., Прохоров В.И. Методы исследования операций в моделировании организационно-экономических задач. – М., 1992.
9. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. – М., 1999.
10. Жак С.В. Математические модели менеджмента и маркетинга. – Ростов-на-Дону, 1997.
11. Жданов С.А. Экономические модели и методы в управлении. – М., 1998.
12. Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления для менеджеров. – М., 2007.
13. Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений. – М., 2007.
14. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М., 1997.
15. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М., 1975.
16. Иозайтис В.С., Львов Ю.А. Экономико-математическое моделирование производственных систем. – М., 1991.
17. Исследование операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. Т. 1. Методологические основы и математические методы; Т. 2. Модели и применения. – М., 1981.

18. Исследование операций в экономике / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М., 1997.
19. Карданская Н.Л., Чудаков А.Д. Системы управления производством: Анализ и проектирование. – М., 1999.
20. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel. – Киев; М., 2006.
21. Козловский В.А., Маркина Т.В., Макаров В.М. Производственный и операционный менеджмент. В 2-х тт. – СПб., 1998.
22. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб., 2000.
23. Кузин Б., Юрьев В., Шахдинаров Г. Методы и модели управления фирмой. – СПб., 2001.
24. Курицкий Б. Поиск оптимальных решений средствами Excel. – СПб., 1997.
25. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. – М., 2003.
26. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. – М., 2000.
27. Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу. – М., 1985.
28. Малыхин В.И. Математика в экономике. – М., 1999.
29. Малыхин В.И. Математическое моделирование в экономике. – М., 1998.
30. Матвеев Л.А. Компьютерная поддержка решений. – СПб., 1998.
31. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / Под ред. В.А. Колемаева. – М., 2008.
32. Моделирование производственно-инвестиционной деятельности фирмы / Под ред. Г.В. Виноградова. – М., 2002.
33. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. – СПб., 2002.
34. Мур Дж., Уэдерфорд Л. и др. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. – М.; СПб.; Киев, 2004.
35. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. – М., 1975.
36. Просветов Г.И. Математика в экономике: задачи и решения. – М., 2005.
37. Просветов Г.И. Математические методы в экономике: Учебно-методическое пособие. – М., 2005.
38. Просветов Г.И. Математические модели в экономике: Учебно-методическое пособие. – М., 2006.
39. Розен В.В. Модели принятия решений в экономике. – М., 2002.

40. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб., 2001.
41. Сигел Э.Ф. Практическая бизнес-статистика. – М.; СПб.; Киев, 2002.
42. Символоков Л.В. Решение бизнес-задач в Microsoft Office. – М., 2001.
43. Слуцкин Л. Курс MBA по прогнозированию в бизнесе. – М., 2006.
44. Стивенсон В. Дж. Управление производством. – М., 1999.
45. Таха У. Введение в исследование операций. – М., 2005.
46. Томас Р. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности. – М., 1999.
47. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. – М., 1999.
48. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике. – М., 1998.
49. Хачатрян С.Р., Пинегина М.В., Буянов В.П. Методы и модели решения экономических задач. – М., 2005.
50. Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. – М., 1969.
51. Хорнби У., Гэмми Б., Уолл С. Экономика для менеджеров. – М., 1999.
52. Чавкин А.М. Методы и модели рационального управления в рыночной экономике. – М., 2001.
53. Чейз Р.Б., Эквилайн Н.Дж., Якобс Р.Ф. Производственный и операционный менеджмент – М.; СПб.; Киев, 2007.
54. Чернов В.П. Введение в линейное программирование. – СПб., 2002.
55. Чернов В.П. Математика для топ-менеджеров. – СПб., 2002.
56. Чернов В.П. Математика и элементы статистики. 2-е изд. – СПб., 2006.
57. Чернов В.П., Ивановский В.Б. Теория массового обслуживания. – М., 2000.
58. Чернов В.П., Чернов А.В. Информатика и Excel. – СПб., 2002.
59. Чернов В.П., Эйсснер Ю.Н., Чернов А.В. Моделирование управленческих решений. – СПб., 2006.
60. Чернов В.П. Операционный и производственный менеджмент. – СПб., 2008.

61. Чернов В.П., Чернов А.В. Инструменты управления проектами. – СПб., 2008.
62. Чернов В.П., Эйсснер Ю.Н., Чернов А.В. Модели и методы разработки управленческих решений: прогнозирование и планирование. – СПб., 2009.
63. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. – М., 1977.
64. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе – М., 1999.
65. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Б. Математические методы и модели в управлении. – М., 2000.
66. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. – М., 1997.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Чернов Виктор Петрович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
В ЭКОНОМИКЕ И МЕНЕДЖМЕНТЕ**

Учебное пособие

Редактор *Е.Д. Груверман*

Подписано в печать 1.09.10. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 14,7. Тираж 350 экз. Заказ 399. РТП изд-ва СПбГУЭФ.

Издательство СПбГУЭФ. 191023, Санкт-Петербург, Садовая ул., д. 21.